Las Aventuras Matemáticas de Daniel

VERSIÓN DIGITAL

Danny Perlch C.

EDITORIAL Impacto

EDITORIAL
Impacto
www.editorialimpacto.cl

LAS AVENTURAS MATEMÁTICAS DE DANIEL

LAS AVENTURAS MATEMÁTICAS DE DANIEL
Editorial Impacto
Graciela Barría Téllez 0381
Punta Arenas, Chile
www.editorialimpacto.cl

www.sectormatematica.cl
Diseño de Cubierta:
Danny Perich Lara
ISBN: 978-956-8680-008
Cámara Chilena del Libro
Primera Edición
Marzo de 2008

Danny Perich Campana

Profesor de Estado en Matemática, Diplomado en Planificación y Desarrollo de Organizaciones Educativas.

Obtuvo el premio Euclides a la Docencia Escolar en Matemática, otorgado por la Pontificia Universidad Católica de Chile; además, obtuvo el Premio a la Innovación Educativa del proyecto Enlaces, otorgado por la Universidad de Magallanes, por su Portal Web Sector Matemática; primer lugar nacional del concurso "Aprender con Educared" y primer lugar regional en el concurso "Guías de Aprendizaje para una escuela deseable".

Desarrolló el contenido PSU Matemática 2003-2004 del Portal Educar Chile y la competencia internacional de matemática "El Gran Desafío".

A mi madre Leonor.

A mi esposa Lucy.

A mis hijos Danny, Fabián y Christian.

A mi nieto Benjamín.

Gracias por cederme su tiempo para hacer realidad este libro.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Desde los inicios de la Reforma Educacional en Chile, se ha promovido la enseñanza de la matemática, enfatizando su aplicación a la vida cotidiana. Sin embargo, hacer esta aplicación es un desafío a los esquemas tradicionales de enseñanza, a las visiones compartidas en el mundo social y cultural, y a las creencias que se tienen de la disciplina, especialmente los niños y jóvenes que han fracasado en comprenderla, muchas veces a causa de de una enseñanza sin sentido, descontextualizada y poco práctica.

Nadie que piense en clase de matemática, piensa en representaciones teatrales, exploraciones en terreno, disertaciones, poesías, cuentos, videos, jornadas culturales, proyectos sociales, etc. y menos si se refiere a la educación media.

La mayoría pensaría en el Baldor, con sus miles de ejercicios de cálculos sin contexto, o en las guías de cien o más ejercicios de un tema, como se ha enseñado en la pedagogía tradicional por muchos años.

En la escuela, a los alumnos les gusta vivir experiencias de aprendizaje y, en matemática, apreciarían que hubiese algo más que guías llenas de ejercicios que al final terminan por desmotivarlo. Incluso, a veces, suelen "odiar la matemática", como ellos dicen por esta falta de conocimientos sobre su utilidad práctica en la vida cotidiana.

Una matemática con sentido implica reconocerla en el entorno inmediato, vivirla como una experiencia significativa, natural y concreta, de modo tal que les permita conocer su mundo matemático, sintiéndose motivado por su hermosura, como le ocurre a los niños y jóvenes con el estudio del arte, de la música, de la educación física, etcétera.

Con esta visión, el autor de este libro ha implementado en su práctica de profesor de matemática los cambios necesarios, para desarrollar el currículo aplicado a la vida cotidiana en la educación media, mediante creativas, entretenidas y vibrantes actividades.

Esta novela pretende aportar un modelo didáctico que rompe los esquemas tradicionales de enseñanza de la matemática y del trabajo pedagógico de los profesores, a través de un relato que mezcla la ficción literaria con la matemática viva y real, en innovadoras experiencias muy participativas y vivenciales donde la mediación de los profesores se aprecia como fundamental para lograr, no sólo que sus alumnos aprendan matemática y gusten de ella, sino que le atribuyan el papel que le corresponde como herramienta desarrolladora primordial en el avance científico y tecnológico.

Esta novela de matemática describe una realidad educativa desde las múltiples vivencias escolares, pero también propone soluciones metodológicas, ideas, y actividades creativas e innovadoras para el abordaje didáctico del sector en enseñanza media.

Pero lo más importante que la novela destaca es que la renovación pedagógica no sólo es posible, sino necesaria para la generación de cambios positivos en la formación matemática. El autor demuestra que una metodología apropiada permite que los alumnos comprendan por qué y para qué se les enseña matemática.

INICIO ESCOLAR

Tomó las llaves de su auto, revisó por última vez su maletín, para ver si tenía todos sus materiales de planificación, se despidió de su familia y, con paso firme, salió de su casa. Mientras conducía, escuchaba en la radio, las noticias de los arreglos en las calles y sus dificultades, las vías con posibles tacos, y como siempre ocurría en ese periodo, se comentaba el inicio de un nuevo año escolar, aunque sus pensamientos estaban aún en aquellos tranquilos días de vacaciones que lo renovaron de energía.

"Bueno… Y aquí vamos de nuevo. ¿Qué novedades tendremos este año?"

Con este pensamiento, Daniel Mercado cruzaba el portal de su colegio. Profesor de Matemática, titulado hace veintitrés años, ya pintaban sus primeras canas y su piel reflejaba el inexorable paso de los años. Trabajaba en el Colegio "Nuevo Horizonte", desde hacía doce años, atendiendo a los alumnos de primero a cuarto año de educación media, aunque a veces por alguna necesidad, también debía cubrir los cursos de séptimo y octavo básico.

El "Nuevo Horizonte", un establecimiento de muchos años en la zona, en vista de los nuevos tiempos que corren, había decidido incorporarse a la Reforma Educacional, que ya se había iniciado algunos años atrás en el país y de la cual ellos no habían formado parte hasta ahora. Esto implicaría un cambio importante tanto en sus planes de estudio como en las metodologías de los profesores del plantel. Esa era la gran novedad con la que se encontraría Daniel y todos los docentes del colegio en el primer Consejo General de Profesores.

Después de besos, abrazos y alegres relatos sobre las recién finalizadas vacaciones, Sonia Montenegro, Directora del colegio, inició el Consejo con la amabilidad de siempre, dando un breve saludo de bienvenida y anunciando grandes desafíos para el nuevo período escolar, luego cedió la palabra al Jefe de la Unidad Técnico Pedagógica, Freddy Santoro, quien dio a conocer los cambios que se avecinaban e informó que, para ayudar en esta nueva etapa del colegio, se habían contratado los servicios de destacados educadores, quienes dictarían un curso de una semana, mañana y tarde, sobre los nuevos planes y programas de estudio, metodologías y evaluación.

La preocupación por la información dada se hizo notar de inmediato, sabían que se avecinaba un cambio total en el modo de ver y llevar a cabo las prácticas pedagógicas. Obviamente, la noticia dada fue comentario de toda la mañana y mientras algunos ya conocían algo de ese modo de trabajo, la gran mayoría sentía el temor de enfrentar un cambio tan brusco, entre ellos Daniel.

Su primer encontrón fue cuando le entregaron los nuevos Planes y Programas de estudio para el presente año, los cuales debería leer y analizar con el objetivo de ir empapándose de los cambios anunciados. En una rápida hojeada, no halló algunos contenidos que él consideraba típicos y necesarios en matemática, como Lógica y Teoría de Conjuntos, en especial las Relaciones, materia que daba en segundo medio y que a su parecer favorecía el razonamiento abstracto del educando y asentaba las bases para el futuro estudio de las Funciones. Tampoco estaban las Matrices ni los Determinantes. Daniel había sido formado en la cultura de los Conjuntos, en el mundo de las uniones, las intersecciones, diagramas de Venn y otros conceptos afines que fueron siempre parte de su quehacer docente, pero desde ese instante comenzaban a cubrirse de pasado.

También cuestionaba los cambios en primero medio. Le incomodaba pensar que ya no tendría que explicar a sus alumnos y alumnas el famoso cubo de un binomio y el cuadrado de un trinomio, los cuales hacía aprender de memoria y le permitían sentirse un rey frente a sus alumnos al recitárselo en apenas siete segundos cronometrados: “el cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más o menos el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo término, más (siempre más) el triple del primer término por el cuadrado del segundo término, más o menos el cubo del segundo término”

Recordaba, con una pequeña sonrisa, cuando a sus alumnos de cuarto año medio les daba "pequeñas" tareas, que debían entregar a las ocho horas del día siguiente y sin plazo adicional, por ejemplo, sobre cálculo de determinantes 4 x 4 o 5 x 5 cuyos elementos eran generalmente binomios y que para realizarlos debían pegar de cuatro a seis hojas cuadriculadas, sumando restando y multiplicando enormes expresiones algebraicas que ponían a prueba su paciencia y también su estado físico, ya que muy pocos alcanzaban a dormir con tal de entregar el trabajo en el horario acordado. Y las Identidades Trigonométricas, con las que sus alumnos sufrían ya que había coleccionado unos ejercicios que costaban una enormidad demostrarlos y él lo sabía…

ADIÓS MATEMÁTICA MODERNA

Al día siguiente, tal como lo había anunciado Freddy, Jefe de UTP, se iniciaba el curso sobre la Reforma Educacional. A Daniel le esperaban muchos momentos de preocupación y de cuestionamiento sobre su trabajo realizado hasta la fecha.

Ese día, tres de marzo, se reunió con Camila Bustamante, colega con la que trabajaba desde hacía siete años y a la que permanentemente surtía de materiales de trabajo, muy apetecidos por los profesores de matemática de la región, ya que contenían enormes cantidades de ejercicios, de gran variedad, con un esquema que iba desde los más fáciles a los muy difíciles, incluyendo algunos de "misión imposible" para los alumnos e incluso para algunos profesores. Juntos, se dirigieron al salón donde se reunirían todos los profesores que hacían clase de matemática en el colegio, más algunos invitados de otros establecimientos, donde se realizaría la mayor parte de las actividades del curso.

La introducción estuvo a cargo del responsable de la actividad, el Dr. Julio Zelada, destacado matemático e investigador nacional e internacional.

—En la actualidad —comenzó exponiendo el Dr. Zelada— las metas de la enseñanza de la matemática son de consenso. Y este es un primer punto que todos ustedes deben tener claro. Hay acuerdo en saber qué se debe buscar en su aprendizaje, el tipo de enseñanza adecuada a estos propósitos, el papel que juega la resolución de problemas, y cómo influyen las creencias y actitudes de los profesores e investigadores en la búsqueda de estas metas.

—Esta nueva visión sobre la enseñanza de la matemática —continuó diciendo— nos señala que esta debe realizarse en forma activa, dándole sentido al entorno y empleando toda la tecnología disponible. También define a la matemática como una actividad social y cultural en la que el conocimiento no se descubre, sino que se construye a partir de la experimentación, formulación, contrastación y justificación de conjeturas. Y algo muy importante, en lo que durante el curso se insistirá, mirando el entorno desde un punto de vista matemático en busca de patrones y regularidades en las situaciones problemáticas.

—Pero no crean que esto es algo nuevo y que de un día para otro a todos se nos prendió la ampolleta y vimos todo con mucha claridad —expresó con una sonrisa— Ya en el año 1992 el destacado profesor Santaló nos hablaba sobre esto. Les voy a leer lo que él señalaba en esos años —extrajo unos apuntes, cambió de lentes y leyó—: "En épocas de cambios rápidos en la manera de vivir, como en la actual, si la educación permanece estancada pronto se va alejando de la realidad y los educandos pasan a ser preparados para un mundo de otra época, con necesidades muy distintas a las del presente. Con respecto a los contenidos de matemática en los distintos años, los cambios tecnológicos y el crecimiento de las aplicaciones de la matemática en las distintas áreas del saber, obliga a cambios fundamentales. Deben suprimirse muchas cosas obsoletas e inútiles y sustituirlas por otras actualmente útiles para muchas necesidades profesionales y para la comprensión de cómo funcionan muchas de las tecnologías del presente."

Al terminar de leer hizo una gran pausa, mientras hacía un recorrido con su mirada, observando a cada uno de los presentes.

—Para eso estamos hoy aquí —dijo alzando la voz—, para suprimir cosas obsoletas, para actualizarnos, para analizar nuestras metodologías, para no cometer el error de preparar a nuestros alumnos para un mundo que no existe.

—Por eso —volvió a su tono normal—, les deseo una excelente semana de reflexión y trabajo, les aseguro que una vez finalizado este curso, ustedes ya no serán los mismos.

Un fuerte aplauso dio inicio al curso.

Mientras se acomodaban los equipos para la primera exposición, Camila y Daniel, conversaban sobre lo que vivirían en unos pocos minutos más.

—Espero que no sea otro señor de oficina que nunca ha hecho clases que viene a hablarnos de la enseñanza de la matemática —refunfuñó Daniel.

—Puede ser —contestó Camila—, pero igual me interesa escuchar lo que se plantea ya que he oído tanto de los cambios en la educación, especialmente en matemática, que estoy impaciente por saber y entender bien de qué se trata.

—Mira amiga —inquirió Daniel tomando una pose de entendido en la materia— te aseguro que nos hablará de lo mismo de siempre, pero incorporando un vocabulario nuevo con el fin de hacernos creer de grandes cambios educativos.

—No lo creo —señaló Camila pensativa— por lo que expresó el Dr. Zelada al inicio del curso, hay otra visión de la matemática y nosotros debemos cambiar nuestro enfoque de acuerdo a esa perspectiva.

—¡Escuchemos! Ya comienza.

El conferencista inició su exposición:

"Para entender los cambios actuales, hay que trasladarse en el tiempo y analizar otras reformas anteriores, tales como la ocurrida durante el período del surgimiento y expansión de la llamada Matemática Moderna. Aunque les parezca extraño, esta reforma matemática surge en los años 60, tras el revuelo provocado por el lanzamiento al espacio del primer satélite artificial, el Sputnik I, creado por los rusos. Eran los tiempos de la Guerra Fría, por lo que este hecho preocupó enormemente a las esferas políticas de Occidente"…

Bastaron un par de frases para que los asistentes al curso se llevaran las primeras sorpresas, porque a pesar de estar entregando por muchos años los contenidos basados en ella, jamás habían sabido que éste pudiese estar relacionado con hechos históricos tan relevantes.

…"La decisión fue unánime: había que acelerar en ciencias, tecnología y matemática para competir, por lo que los gobiernos asumieron compromisos políticos y económicos. La reforma de las matemáticas se hacía imprescindible"…

Daniel y Camila cruzaron sus miradas sin decir palabras, para no perderse ningún detalle de la exposición.

…"Durante el seminario de Royamount, celebrado en 1959, se establecieron las bases filosóficas de este movimiento, cuando el famoso matemático francés Jean Diudonné lanzó el grito '¡abajo Euclides!', contando con el apoyo de otro ilustre matemático francés, Gustave Choquet. Pero lo más decisivo, fue la primera Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática celebrada en Bogotá el año 1961, cuando delegados de los países americanos y famosos matemáticos europeos se reunieron, bajo la dirección del matemático norteamericano Marshall Stone. En aquella conferencia, se creó el Comité Interamericano de Educación Matemática para impulsar, en los diferentes países, la reforma que modificó currículos, programas, métodos, objetivos y la visión de la naturaleza de las matemáticas. El énfasis estaba dado en lo abstracto y deductivo, siendo su eje, la Teoría de Conjuntos, las estructuras algebraicas y las generalizaciones abstractas".

El conferencista hizo una pausa y Daniel aprovechó de hacer un comentario.

—¡Esa es la materia que me gusta! ¡No la vi, ayer, cuando leí el programa de estudio!

—A mí también me extrañó no ver esos contenidos —confirmó Camila.

"Fue así —continuó exponiendo el conferencista— que las matemáticas se cargaron de esa ideología y de una manía por un 'purismo matemático' que las llevó a distanciarse de las ciencias, de la tecnología y de la economía. La reforma contribuyó a uno de los principales defectos de la ciencia latinoamericana: el academicismo. Este movimiento internacional por la implantación de nuevas matemáticas, quería enseñarlas como una disciplina integrada por los conceptos unificadores de los conjuntos, relaciones, funciones y operaciones, las estructuras fundamentales de grupo, anillo, cuerpo y espacio vectorial, y con la rigurosidad del llamado método 'axiomático'. Otras propuestas eran, adoptar el simbolismo moderno, dar mayor importancia al empleo de gráficas, la eliminación de gran parte del álgebra tradicional; además, algo sumamente grave, la modificación y prácticamente eliminación de la geometría euclidiana tradicional"

—¿Sabías algo de esto? —preguntó Daniel, sorprendido y ahora interesado en el tema de la conferencia.

—¡Para nada! ¡Jamás, mientras estudié mi carrera, me mencionaron esos hechos! y la verdad es que tampoco me preocupé por averiguarlo.

—¡Qué lástima! —exclamó Camila.

Ambos siguieron escuchando al profesor.

"Y ahora después de múltiples estudios y análisis se ha llegado a la conclusión de que la matemática moderna fue un error histórico. No había desarrollado competencias intelectuales, los alumnos y alumnas habían perdido capacidades concretas de modelización, de interpretación y de visualización".

Al finalizar su exposición, el profesor recomendó como lectura el libro "El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?" de Morris Kline.

Daniel y Camila se miraron incrédulos. Estaban visiblemente afectados, sintiendo el impacto de la conclusión lapidaria de la conferencia. Se percataron que por muchos años habían estado trabajando con unos contenidos que, en vez de favorecer el aprendizaje, causaban un gran perjuicio.

La comisión organizadora del curso invitó a todos los participantes a un pequeño descanso con un estimulante café con galletas y pasteles.

Fue el momento propicio para comentar la conferencia y como había profesores de otros colegios de la zona, el intercambio de opiniones fue muy enriquecedor. Lo que quedó muy claro, es que se tenía muy poco conocimiento de esa verdad. Obviamente había una evidente deficiencia en la formación de los profesores, ya que los hechos históricos rara vez se consideraban en la elaboración de los programas de la carrera de pedagogía en matemática, con excepción de Pitágoras y su famosa escuela.

RUMBO AL CONSTRUCTIVISMO

Comenzó la segunda conferencia "Constructivismo y Matemática". La disposición de los profesores asistentes había cambiado, sus expectativas ahora eran mucho mayores.

Si bien Daniel y Camila habían sufrido un remezón con respecto a los conjuntos, ahora sentirían un terremoto al escuchar que sus prácticas deberían tomar un nuevo rumbo y que las tradicionales clases que impartieron por años, no estaban logrando las competencias necesarias para el mundo de hoy.

"Lo primero —señaló el conferencista—, es saber qué propone la Teoría Constructivista. El mismo nombre lo sugiere: el conocimiento se construye, considerando que el sujeto posee estructuras mentales previas que se modifican a través del proceso de adaptación".

—Aun no me queda claro —susurró Camila—. ¿Qué tiene que ver esto con la matemática?

—A mí tampoco —acotó Daniel.

Y siguieron la exposición con la esperanza de escuchar en algún momento la palabra matemática.

…"Esta teoría propone que el sujeto que conoce es el que construye su propia representación de la realidad, se construye a través de acciones sobre la realidad. El aprendiz aprende cómo aprender, no solamente qué aprender".

La exposición continuó y los asistentes la seguían palabra a palabra, parecía que cada uno la hacía, mentalmente, vida en su realidad escolar. Todo se clarificó cuando aparecieron algunos ejemplos.

—¡Bien, eso es lo que esperaba! —exclamó Daniel— ¡No tanta teoría!

Cuando los asistentes esperaban algunas expresiones algebraicas de alto nivel para resolver, el conferencista planteó lo siguiente:

—Dibujen dos puntos en su hoja de apuntes y únanlos por una recta.

Hizo una pausa, mientras todos seguían sus indicaciones.

—Ahora hagan lo mismo, pero con tres puntos no colineales y luego con 4 puntos.

—¡Muy fácil! —dijo Daniel. —No me veo haciendo esto en educación media.

—Mejor esperemos —le respondió Camila— para algún lado va esto.

—¿Cuántas rectas debieron trazar? —preguntó el expositor.

—Para los tres puntos, se trazaron 3 rectas —respondió la profesora Marta—, mientras que para los 4 puntos, se trazaron 6.

¡Muy bien! —aprobó el expositor—. Ahora, hagan el mismo procedimiento para 5 puntos.

—Esas son muchas rectas —dijo Daniel—. Mejor las calculo sin dibujarlas. Me dan 20 rectas.

—Creo que estás equivocado porque a mí me dan 10 solamente —respondió Camila.

—Tienes razón —reconoció Daniel—, pasan 4 rectas por cada vértice y como son 5 vértices me da un total de 20 rectas, pero algunas están contadas dos veces, es decir, tengo que dividir mi cálculo por 2.

—Como ustedes ven —dijo el expositor— ya no es tan fácil dibujar tantas rectas al aumentar la cantidad de puntos, por lo que sería conveniente seguir un procedimiento distinto al geométrico.

—Eso es lo que hice yo —manifestó Daniel a Camila.

—Determinen entonces, cuántas rectas se deben trazar con 6 puntos no colineales, pero ahora sin realizar el dibujo.

—Voy a seguir tu procedimiento. Por cada punto pasan 5 rectas y como son 6 vértices, eso da un total de 30 rectas y como yo no pienso equivocarme como otro —bromeando y señalándolo con un gesto— divido por 2, para descartar las repetidas y me dan en total 15 rectas.

—¡Qué graciosa! —respondió Daniel—, pero no sé para qué estamos haciendo esto.

—Ahora —continuó el expositor—, supongan que tenemos que trazar rectas que unan n puntos, ¿cómo sabrán la cantidad de rectas a trazar? —desafió el expositor.

—Muy fácil —dijo Daniel a Camila—, siguiendo el mismo procedimiento anterior. Son n puntos y por cada uno de ellos se trazan n—1 rectas lo que da un total de $n \cdot (n-1)$ rectas, pero hay que dividir por 2, lo que nos da finalmente $\frac{n(n-1)}{2}$

—Exactamente, me da lo mismo —le confirmó Camila—. ¿Te diste cuenta que, casi como un juego, llegamos a determinar una fórmula matemática?

—Tienes razón. Comienzo a comprender lo que es construir aprendizajes —reconoció Daniel. —En definitiva, hemos logrado una generalización de una determinada situación.

—Ahora, les voy a plantear otra problemática para que la resuelvan —dijo el expositor—. A una fiesta llegan n amigos los cuales se saludan entre sí, ¿cuántos saludos se dieron en total?

Todos los presentes se concentraron en el problema planteado y sólo fueron interrumpidos cuando Rocío habló en voz alta.

—Profesor, esta es la misma situación que usted planteó sobre la cantidad de rectas para n puntos, por lo tanto, la respuesta es la misma que la anteriormente encontrada.

—Exactamente y eso estaba esperando que me respondieran —dijo complacido—, que se dieran cuenta que la fórmula que acabamos de concluir, es una generalización que puede ser obtenida de otras múltiples situaciones. Y les puedo agregar otro problema del mismo tipo, ¿cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?

Para Daniel, las siguientes horas estuvieron llenas de contradicciones, estaba entre el tradicionalismo de sus prácticas de aula y las nuevas ideas que surgían espontáneamente.

Junto a Camila y otros colegas debían planificar, como ejercicio, la primera clase "reformista" y luego exponerla frente a los otros participantes del curso.

Para Daniel, el esquema de pasar contenidos, dar algunos ejemplos, entregar una guía de 100 ejercicios o más en lo posible y luego aplicar una prueba, eran la fórmula perfecta, la del profesor perfecto.

Daniel jamás había analizado su práctica, ni autocriticado su forma de enseñanza. Él era el expositor, el que planificaba, conducía y hacía la clase, el que integraba, resumía y ordenaba todo el saber; basaba su clase en un alumno promedio, sin diferenciar persona; medía principalmente aprendizajes de la habilidad de memorizar y era netamente frontal. Ahora, se sentía apesadumbrado, inquieto…

—¿Qué te pasa Daniel? Te veo distraído y muy pensativo.

—Estoy preocupado Camila…, no sé si seré capaz de cambiar mis clases y adaptarme a esta nueva forma de enseñar.

—Pero Daniel… ¿Dónde quedó aquel joven profesor que le gustaba crear ejercicios novedosos, desafiar a los alumnos con problemas de ingenio y leerles libros de Agatha Christie para mejorar su razonamiento? ¿No te das cuenta que tú ya estás en la reforma hace tiempo?

—¿Me estás hablando en serio?

—Por supuesto. Cuando le das de tarea que inventen un ejercicio, que hagan un poema con conceptos matemáticos o una figura humana con elementos de geometría, estás siendo un reformista.

Daniel sonrió y su semblante cambió con los recuerdos de tanta cosas que se le habían ocurrido durante su vida de profesor. Como aquel cuando salió con algunos cursos a medir el ancho del río y la altura de algunos edificios, usando las funciones trigonométricas o como aquella vez durante Fiestas Patrias, cuando con un curso, crearon un método para no perder jamás en el juego de azar "Mayor o menor"…

—Lo que tenemos que hacer ahora —aclaró Camila—, es formalizar todo aquello que se nos ocurría, planificarlo e incorporarlo a la clase y a las actividades de la asignatura.

—“Subsector” —corrigió Daniel— y ambos rieron con mucha gana.

—¡Ya pues! —se quejaron los otros integrantes del grupo—. ¡Trabajemos!

Lo primero que hicieron, fue definir el contenido en el que aplicarían los nuevos conceptos y metodologías recién aprendidos. Después de muchas sugerencias por parte de los integrantes del grupo se optó por “Potencias y Regularidades”

—¿Cómo podemos iniciar el tema? —preguntó Camila.

—Yo partiría recordando la definición, dando los teoremas y finalizaría con una buena guía de ejercicios y listo —dijo Daniel, haciendo una breve pausa— y con voz quejumbrosa concluyó, —pero ya no se puede hacer así.

Todos rieron y confirmaron su conclusión.

Rodolfo, profesor de matemática del Colegio “Claudio Arrau”, ya tenía alguna experiencia de la Reforma, pues su establecimiento la había implementado el año anterior y habían pasado por una situación similar. Decidió aceptar la invitación al curso para profundizar en ella y afianzar su metodología.

—Yo propongo —dijo Rodolfo— comenzar con el siguiente ejercicio: descubrir cuál es la última cifra de 229, basándose en alguna regularidad, pero sin calcular.

—Me parece bien —apoyó Rocío, la profesora de matemática de 8º básico— y se me ocurre que podríamos hacer una tabla que apunte hacia nuestro objetivo. Algo así:

Un número termina en	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Su cuadrado termina en										
Su cubo termina en										
Su cuarta potencia termina en										
Su quinta termina en										

—Y en base a la tabla —sugirió Camila—, podemos elaborar algunas preguntas.

—Por ejemplo —aportó Daniel— en qué número termina 253^4 o el número 6.872 ¿puede ser el cuadrado de un número entero?

—¿Qué observas respecto a la quinta potencia de un número cualquiera? —agregó Rodolfo.

—Estaría faltando, una aplicación de las potencias —dijo Rocío.

—Podríamos contar la historia del ajedrez —sugirió Daniel

—Excelente idea —apoyó Camila— ¡redactemos la historia!

Entre todos elaboraron el siguiente texto: "Un monarca, fascinado por la riqueza del juego, quiso premiar a su inventor. En el palacio, el inventor del ajedrez solicitó, que se le premiara sencillamente con granos de trigo, en cantidad tal que, en la primera casilla del tablero hubiese un grano, en la segunda 2, en la tercera 4, en la cuarta 8 y así sucesivamente.

Sorprendido el monarca por la modestia del inventor, le dijo que sí de inmediato, pero cuando mandó a calcular cuánto trigo era necesario, resultó ser una cantidad astronómica, no siendo posible satisfacer el pedido del inventor".

—Y después les pedimos, calcular en base a potencias de 2, la cantidad de granos en cuestión y determinar en qué número termina esa potencia —aportó Rocío.

Leyeron su trabajo, le agregaron unos ejercicios más y esperaron el turno del grupo para presentarlo.

Los nervios consumían a Daniel. Un sudor frío recorría todo su cuerpo. A él le correspondía exponer la parte inicial del trabajo realizado y le incomodaba la forma en que debía hacerlo. El temor de hacerlo mal, se contraponía a la experiencia que tenía y el prestigio que se había ganado entre sus colegas. Escuchó los trabajos de los otros grupos y se imaginó como un alumno en clases viviendo esa nueva forma de aprender y le gustó.

—¡Te toca! —le avisó Camila—, codeándole suavemente.

Daniel se encaminó raudamente hacia el sector de las exposiciones, con aplomo, tratando de ocultar sus nervios y el peso que llevaba sobre sus hombros en ese momento.

LOS PROBLEMAS DE LOS PROBLEMAS

Al día siguiente un nuevo expositor iniciaba la jornada, la profesora Javiera Echeñique, quien era famosa por sus singulares escritos sobre matemática y matemáticos, llenos de curiosidades, de comicidad de historias; fuente de motivación y una pauta pedagógica a seguir para una entretenida forma de enseñar. Saludó y de inmediato comenzó su charla.

“Unos policías —dijo con una voz potente, pero agradable— están investigando a un grupo de delincuentes que trafican en un local bien custodiado. Desde un coche camuflado vigilan la entrada al local. Quieren infiltrar al grupo, pero no saben la contraseña. En ese momento llega un cliente, llama a la puerta y desde el interior le dicen ‘18’, el cliente responde ‘9’. La puerta se abre y él accede al interior. Los policías se miran, creen tener la respuesta, pero deciden esperar.

Llega otro cliente, golpea y desde dentro le dicen ‘8’, él responde ‘4’ y la puerta se abre. Los policías sonríen. ¡Ya lo tenemos! Un nuevo cliente llega y desde adentro le dicen ‘14’, a lo que responde ‘7’ y la puerta se abre. El jefe a cargo decide enviar a un agente. Éste llama a la puerta y desde dentro le dicen ‘0’. El policía se paraliza y después de unos breves segundos responde ‘0’. Se oye una ráfaga de disparos y el policía muere. Los otros policías quedan sorprendidos, pero deciden enviar a otro agente. Desde dentro se oye ‘6’ y el policía muy convencido responde ‘3’. Nuevamente los disparos y el policía muere ¿Por qué?”

—¿Qué extraño —murmuró Daniel— estaba seguro de que se trataba de responder la mitad del número que los delincuentes dicen desde adentro.

—Pero eso no tendría mucha gracia —respondió Camila

—Tienes razón, ¿se te ocurre algo?

—Por ahora no, pero estoy analizando —dijo Camila.

Después de unos minutos el profesor consultó si alguien tenía la respuesta.

Camila levantó tímidamente la mano y se puso de pie para responder.

—Creo que se refiere al número de letras que tiene el número, o sea cuando le dicen 18 el cliente debe responder 9, ya que es el número de letras que tiene la palabra dieciocho. Lo mismo ocurre con 8 y 14, pero cuando le dicen “0” él debió responder “4” que son las letras que tiene el número cero. Por último, cuando dijeron 6, la respuesta también debería haber sido 4.

Un espontáneo aplauso alabó la deducción de Camila y Daniel la felicitó mostrando mucho orgullo por su colega.

—¡Excelente! —acotó la profesora—, y para que todos tengan una nueva posibilidad les dejo planteada la siguiente situación para mañana.

—Te encuentras afuera de una habitación, con la puerta cerrada. Desde tu posición no se puede ver nada de lo que sucede al interior. Dentro de la habitación hay una ampolleta e inicialmente se encuentra apagada. Del lado de afuera de la habitación hay 3 interruptores, de los cuales sólo uno está conectado a la ampolleta. Tú, desde afuera y con la puerta cerrada, puedes accionar la cantidad de interruptores que quieras, las veces que quieras. Luego debes entrar a la habitación y al salir, sin volver a accionar los interruptores, debes estar en condiciones de afirmar cuál de los tres interruptores es el que acciona la ampolleta.

Y con esa motivadora introducción continuó la exposición.

—Podrían ustedes pensar que esto no tiene nada que ver con una clase de matemática —señaló Javiera—, pero piensen en el momento que se inició esta charla y cómo se sienten en este instante. Les aseguro que hay curiosidad, motivación y se estarán preguntando qué vendrá ahora. Si ustedes logran que en cada inicio de clases se cree un ambiente similar, el aprendizaje que lograrán será óptimo, pero en esto es fundamental no improvisar, para ello se debe contar con una adecuada planificación basada en un buen set de problemas, curiosidades, acertijos, etc.

—También —agregó— pueden crear un diario mural que tenga una ubicación adecuada para que todos los alumnos del colegio puedan participar de permanentes desafíos. Por ejemplo, colocar problemas de Pensamiento Lateral que son muy llamativos e interesantes. ¿Los conocen?

Todos se miraron con un signo de interrogación en el rostro y respondieron que no.

—Les voy a dar uno como ejemplo. Una niña vive en su casa con sus padres. Ellos le dijeron siempre, que por ninguna razón abriera la puerta del sótano, para que no viera algo que no tenía que ver.

Cierto día, los padres salen y se olvidan de asegurar la puerta del sótano con llave. La niña, no pudiendo resistir la tentación, aprovecha la ocasión y abre la puerta del sótano. Lo que ve, la deja perpleja, no puede creer el espectáculo que se cierne ante sus ojos. Más tarde, la policía arresta a sus padres y ponen a la niña en un lugar seguro. ¿Qué vio la niña?

Las respuestas fueron múltiples y la creatividad se hizo notar entre los participantes de la charla.

—Pero… las respuestas pueden ser muchas —expresó Daniel.

—¡Escuchemos! —dijo Camila—, porque la verdad es que estoy impaciente por saber qué vio la niña. Pero al final nadie llegó a la respuesta.

"El término pensamiento lateral —prosiguió la expositora—, fue concebido por Edward de Bono para describir un tipo de pensamiento distinto al pensamiento convencional o lógico y que es una fuerza importante y necesaria para el cambio. Es una habilidad que puede permitirnos resolver problemas en casa o en el trabajo y lo importante es, que es un poder latente que todos poseemos. Puede desarrollarse mediante el entrenamiento, exigiendo sólo un cambio de actitud mental y un enfoque abierto a la solución de problemas.

En el pensamiento convencional usamos experiencias y suposiciones que parten de situaciones similares, utilizando un enfoque lógico y racional. Sin embargo, a veces este proceso deja de sernos útil. Se nos presentan límites que sólo podemos superar dejando de lado nuestras suposiciones básicas y enfocando el problema desde un ángulo completamente nuevo, allí aparece el pensamiento lateral."

Y llegó lo que esperábamos.

"La solución del problema planteado es muy simple. Todos ustedes usaron el pensamiento lineal o vertical, considerando que la niña estaba situada fuera del sótano". Hizo una pausa. "Error estimados colegas. Ella estaba dentro del sótano y lo que vio, que la dejó perpleja, fue la claridad del día".

—No lo había pensado así —comentó Camila.

—Yo menos —reconoció Daniel—, pero ya entiendo la idea de este tipo de ejercicios. Es, salir de lo lineal, de lo lógico, para darle al alumno posibilidades de nuevos enfoques a las situaciones problemáticas lo que implicará una mayor creatividad.

—Y se nota que es algo necesario —apoyó Camila—, porque ¿te fijaste que todos somos profesores de matemática y a ninguno se nos ocurrió la solución?

—Somos demasiado lógicos —respondió Daniel.

—Ya que les gustó este tipo de problemas —continuó la profesora Javiera—, les voy a dejar uno planteado y al finalizar la exposición les voy a entregar unos apuntes con muchos del mismo tipo.

A continuación, buscó entre sus apuntes y leyó el siguiente problema:

Dos chicas están haciendo aseo en el sótano de su casa. Cuando terminan, la que tiene la cara limpia se la lava y la que la tiene sucia, no. ¿Por qué?"

"Pero también podemos plantear situaciones que incluyan procedimientos numéricos mezclados con hechos curiosos. Por ejemplo:

Un encuestador pregunta a una mujer cuántos hijos tiene. Tres, contesta ella. ¿Y de qué edades? —vuelve a preguntar el encuestador—. La mujer responde: 'El producto de las edades es 36 y la suma es igual al número de la casa vecina'. El encuestador se retira, pero un instante después regresa y le dice que los datos no son suficientes para saber las edades de los hijos. La mujer piensa un momento y disculpándose le dice: ‘Tiene razón, la mayor estudia piano’. ‘¡Gracias señora!’, responde muy satisfecho el encuestador. ‘Con ese dato, ya sé las edades de sus hijos’. ¿Cuáles son las edades?”

—A pensar se ha dicho —dijo Daniel sonriente.

—¡Qué extraño lo del piano! —se preguntó Camila—, pensando en voz alta.

El silencio en la sala, indicaba que los presentes estaban concentrados en el problema. Incluso Camila llegó a saltar cuando Daniel aseguró sorpresivamente que lo había solucionado.

—Pase adelante colega y cuéntenos cómo obtuvo la solución —inquirió la expositora.

—El encuestador —comenzó Daniel— sabe que el producto de las edades de los tres hijos es 36, así que descompone este número en factores y determina todas las combinaciones posibles.

1—1—36

1—2—18

1—3—12

1—4—9

1—6—6

2—2—9

2—3—6

3—3—4

Después —continúa Daniel—, observa el número de la casa vecina y comprueba que corresponde a la suma de dos de las combinaciones:

1+6+6=13

2+2+9=13

Dado que tiene dos respuestas posibles, regresa donde su encuestada y se entera que la mayor estudia piano. Este dato aclara el problema, ya que al haber una mayor que los otros hijos, la combinación de edades que se ajusta a los datos entregados por la encuestada serían 2, 2 y 9 años.

—¡Excelente colega! Un aplauso —dijo la expositora, dirigiéndose a los asistentes—. Bueno… Hemos resuelto diversos tipos de ejercicios con enunciados de problemas, pero por lo que he percibido en esta charla, no son muy habituales en su práctica docente. ¿Tengo la razón?

—Si —respondieron a coro los profesores.

—Lo que está faltando, es hacer un profundo análisis sobre los tipos de problemas que habitualmente utilizan ustedes en el aula. Y para no romperles ese esquema, voy a ejemplificar con ejercicios que ustedes generalmente extraen de uno de sus textos favoritos: "el Baldor"

—¡Ese es mi texto estrella! —exclamó Daniel.

—¡Y el mío también! —le apoyó Camila.

Y el telón apareció repleto de los tan ansiados problemas:

1. "Un comerciante empleó $1.910 en comprar 50 trajes de a $40 y de a $35. ¿Cuántos trajes de cada precio compró?"

2. "Un hombre tiene $404 en 91 monedas de a $5 y de a $4. ¿Cuántas monedas son de $5 y cuántas de $4?

3. "La población de una ciudad ha aumentado en progresión geométrica de 59.049 almas que era en 1953 a 100.000 almas en 1958. ¿Cuál era la razón de crecimiento por año?"

4. "En un cine, 10 entradas de adultos y 9 de niños cuestan $5,12 y 17 de niño y 15 de adulto $8,31. Hallar el precio de una entrada de niño y una de adulto."

Javiera observaba cómo todos leían y releían los problemas que aparecían en la pantalla. Después un largo silencio de su parte preguntó:

—¿Qué opinan de estos enunciados?

Un murmullo general delató el comentario entre los asistentes, pero nadie se atrevía a comenzar a opinar. Tal vez porque no sabían a qué quería llegar la profesora con su pregunta.

—No veo nada extraño ni alguna relación entre esos enunciados, comentó Daniel a Camila.

—Además, ¡cuántas veces hemos usado algunos de esos problemas en las guías de ejercicios para nuestros alumnos! —agregó Camila.

La expositora, viendo cierto temor de responder, los incentivó con algunos comentarios e interrogantes.

—En el problema de los trajes —señalándolo— estoy seguro que sus estudiantes les preguntan, entre risas, dónde está ubicada la tienda para ir a comprarse 10. En el siguiente, seguro bromean, ¿monedas de \$4? Si alguien tiene alguna, se la cambio por una de \$7.

Una risa general indicó que se comenzaba a entender lo que la profesora estaba buscando al mostrarles esos enunciados.

Rodolfo levantó la mano y la expositora le cedió el turno de opinar.

—Me parece importante que los enunciados de los problemas tengan un vocabulario y cantidades numéricas que se utilizan en la vida cotidiana. No podemos estar hablando de almas, cuando se refiere a habitantes, ni que las entradas a un cine puedan costar una cantidad decimal inexistente en nuestra moneda nacional, como por ejemplo \$5,12. Y aprovecho de dar a conocer mi posición respecto de este texto de matemática, apoyándome en lo que nos contaban ayer sobre Jean Diudonné y su famoso "abajo Euclides"… yo no tengo reparos en gritar "¡abajo Baldor!".

Se sentó y el caos fue total. Las opiniones y discusiones se multiplicaron y no pocos se molestaron ante tan rotunda afirmación, entre ellos Daniel.

—Debo reconocer que Rodolfo tiene razón con lo que expresa —comentó Camila— claro que de allí a descartar el texto de Baldor me parece mucho.

—Es que estos profesores jóvenes creen que se las saben todas y quieren prescindir de todo lo antiguo, como si lo escrito anteriormente no sirviera para nada. —refunfuñó dolido Daniel.

La verdad es que la reunión había caído en una zona densa donde sólo la palabra clarificadora de la expositora podría enmendar rumbos.

—Estimados colegas —dijo Javiera sonriente—, me alegra ver el camino que ha tomado nuestra discusión, porque es el momento de despertar de nuestro letargo pedagógico y analizar cada una de nuestras prácticas, de nuestras metodologías, de nuestro material de apoyo y hasta de nuestra relación con los alumnos.

—Cuando hablamos de resolución de problemas, nos referimos a problemáticas que ayudan al desarrollo de actividades intelectuales, que responden a los intereses de los alumnos, que le son significativos, con una variedad de estrategias para su solución y con un nivel lingüístico contextualizado y al alcance de ellos.

—De seguro ustedes conocen la clásica formulación que hizo Polya de las cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema —continuó Javiera—. Considero de gran importancia recordarlas, analizarlas y hacer paralelos entre su formulación y la de otros investigadores.

Les voy a dejar un material para alguna de sus reuniones de departamento y les aseguro que con el tiempo todo se clarificará. Para finalizar, construyamos una recopilación de las estrategias más frecuentes que ustedes suelen utilizar en la resolución de problemas.

Y comenzó a pedirles a los presentes que describieran una estrategia que generalmente recomendaban a sus alumnos.

—Yo siempre les insisto en que un buen esquema, una tabla o un dibujo, del problema planteado, puede darles claridad en el procedimiento a seguir —aportó un primer colega.

—Una sugerencia que siempre les hago, es que reduzcan el problema a otro más pequeño o que lo asemejen a problemas similares ya trabajados. También que lo reformulen me da buenos resultados —agregó otro.

En su turno Camila relató: —Nunca dejo de sugerir la correcta lectura del problema, insisto en que lo entiendan, que no dejen pasar palabras o conceptos que no sepan y que practiquen el método ensayo y error.

—A mis alumnos —dijo Daniel— les resulta bastante positivo en la resolución de problemas efectuar la reducción al absurdo y también, empezar por el final, como si el problema estuviese resuelto.

—Yo, recomiendo empezar siempre por lo más fácil —expresó Rocío— lo cual parece algo muy lógico, pero no es tan así. La idea que les propongo es que resuelvan un problema similar pero más fácil, más sencillo.

—Bien —señaló Javiera—, me parece que ya hemos hecho un buen listado de estrategias que espero consideren en el trabajo con sus alumnos. No se olviden que siempre, independiente del curso en que el alumno esté, manipular y experimentar, puede aportarle grandes beneficios y darle una mayor claridad sobre lo que debe realizar. Tampoco hay que olvidarse de algunos de los métodos que han sugerido grandes matemáticos, tal como el Principio del Palomar, el análisis de casos límites, la utilización de la simetría, etc.

—¡Muchas gracias por su participación en esta charla! —finalizó Javiera. Espero que en sus futuras prácticas consideren las situaciones analizadas este día.

Un gran aplauso agradeció el trabajo de la expositora.

Conversando con Dios

Había llegado el último día del curso. La exposición de ese día abordaría un tema polémico, por la variedad de puntos de vista que existen al respecto: la evaluación.

"¿Qué es evaluación? —comenzó diciendo el profesor Raúl Jiménez, Licenciado en Matemática y Magíster en Educación—. ¿Para qué evaluar? ¿Cómo evaluar? ¿Cómo realiza usted la evaluación de sus estudiantes? Para responder estas interrogantes, regresemos en el tiempo".

Dio algunos pasos y dirigiéndose a Daniel le preguntó:

—Usted colega… —leyendo el nombre en su credencial de participante— Daniel. ¿Nos podría contar cuál ha sido su experiencia respecto de la evaluación?

—Lo primero que deseo señalar —contestó Daniel—, es que en mis tiempos de estudiante, evaluar y calificar eran lo mismo, al menos así lo veía yo y no recuerdo que alguien nos hubiese aclarado la diferencia. Además, el profesor era "un intocable", siempre tenía la razón y rara vez los alumnos o apoderados pedían explicación por alguna nota. Sin embargo, el periodo que más me marcó, respecto de lo que me consulta, es el universitario, mientras cursaba mi carrera de pedagogía. Existía una creencia, que entre paréntesis todavía perdura en algunas universidades, institutos y centros de formación superior, que cuánto más alumnos se reprueban, mejor profesor se es. La exigencia en cada prueba alcanzaba niveles que iban más allá de la excelencia, era como querer subir una escalera del conocimiento en la que nosotros, los estudiantes, estábamos ubicados en el tercer peldaño, las pruebas que nos hacían preguntaban sobre el séptimo peldaño y el profesor se ubicaba en el último peldaño, el más alto, conversando con Dios.

Las últimas palabras de Daniel, provocaron un comentario generalizado en la sala. El profesor Jiménez permaneció en silencio. —Ese hecho —continuó Daniel—, era evidente en todas las carreras de la universidad; las asignaturas de matemática eran los "coladores", como se les llamaba, ya que, según los profesores, necesitaban discriminar entre los "buenos" y los "malos" alumnos. Recuerdo muy bien el ingreso a mi carrera; éramos cuarenta estudiantes, en segundo año sólo quedábamos trece y al final, logramos terminar la carrera sólo cuatro.

Daniel terminó su relato, pero el profesor Jiménez, ahora muy interesado, quería saber algo más y le preguntó:

—Y cuando usted comenzó a impartir clases, ¿cómo evaluaba?

—Como la universidad me había enseñado —respondió Daniel— con el mismo esquema, pero obviamente en un nivel más bajo.

—Es decir, usted se instaló en la mitad de la escalera —acotó el profesor Jiménez, sonriendo.

—Exactamente —dijo Daniel, también sonriendo— se podría decir que sí, pero no tan lejos de Dios.

Todos se rieron ante la espontánea respuesta de Daniel.

—¿Y en qué ha cambiado usted desde esa época hasta hoy? —volvió a preguntar el profesor Jiménez.

Daniel se movió en su asiento tal vez un poco incómodo ante una nueva pregunta; entretanto, todos pensaban que era la primera vez que lo escuchaban hablar tanto sobre sí mismo.

—Creo que mucho —contestó Daniel—; ahora elaboro mis evaluaciones de tal modo que el alumno que se preparó logre alcanzar un resultado óptimo. Además, me fijo en los procedimientos que realizan mis alumnos. Así, puedo determinar claramente los errores y asignar puntajes justos. Esos errores son los que revisamos la clase posterior a la prueba y que le permiten al alumno ir creciendo matemáticamente y mejorar su rendimiento a futuro. Y si un resultado general no es satisfactorio, antes de acusar a mis alumnos de flojos, analizo qué puede haber fallado y aplico planes remediales.

—¡Muchas gracias Daniel! Tu participación fue muy ilustrativa. —Brindémosle un gran aplauso al colega —insistió.

—¡Bravo! ¡Bien Daniel! —vociferaba Camila mientras aplaudía orgullosamente.

"La evaluación —reinició diciendo el profesor Jiménez—, es uno de los elementos centrales en el proceso de enseñanza aprendizaje, por lo que debe entregar señales claras a los alumnos y a los docentes de lo que se considera relevante.

La evaluación debe informar sobre los avances y las dificultades, constituyéndose en una base esencial para redefinir las vías de mejoramiento o reforzamiento que han de seguirse y aquí vamos a diferenciar los tres tipos de evaluación necesarios, para la toma de decisiones orientada a producir mejoramiento en la educación".

El profesor Jiménez, activó el proyector, cargó sus diapositivas de apoyo y comenzó su exposición.

"Primero, la evaluación inicial, que es la que nos proporciona información sobre los alumnos y alumnas al comienzo del año escolar, de un nivel o ciclo. Información sobre el nivel de conocimientos, las habilidades, las destrezas, las actitudes, los valores, etcétera. Es muy importante su aplicación y ustedes deben sacarle el máximo de provecho, construyéndola a conciencia y analizando los resultados obtenidos y como decía Daniel, determinar los planes remediales correspondientes.

En segundo lugar, la evaluación formativa, llamada también de proceso.

Se trata de hacer un seguimiento que proporcione información sobre los progresos y las dificultades que van presentando los alumnos. Al mismo tiempo, da elementos a los profesores para reajustar sus métodos y estrategias pedagógicas y es, sin lugar a dudas, la característica más acorde con el modelo curricular actual.

Finalmente, la evaluación sumativa o evaluación de producto, que es la que se efectúa al término de una fase del proceso de aprendizaje. Nos proporciona información sobre hasta qué punto se cumplen los objetivos o si se producen los efectos previstos en cuanto al grado de aprendizaje de los alumnos".

—Profesor —dijo Camila. En general es eso lo que hemos hecho siempre para evaluar, tal vez lo más novedoso sea la evaluación de proceso. ¿Podría explicarme un poco más acerca de esta? Agrega—, porque generalmente a uno le exigen resultados, por ejemplo en el SIMCE.

—Por supuesto —le respondió el profesor Jiménez.

"Tradicionalmente el énfasis del proceso evaluativo estaba en los resultados. Ahora, si se quiere alcanzar resultados óptimos, es primordial la preocupación por el proceso, revisando continuamente qué está pasando con el aprendizaje de los alumnos, pero también con la propia práctica docente. Esto no significa restarle importancia a los resultados ya que lograr los aprendizajes esperados es lo fundamental. Un profesor no podría decir que sus resultados son deficitarios porque se ha preocupado principalmente del proceso".

—En las diapositivas que nos muestra —acota Marta, profesora de Educación Básica—, está destacado que se deben evaluar habilidades, pero ¿qué pasa con los conocimientos?

—Ustedes saben, porque lo vivieron —explicó el profesor Jiménez—, que tradicionalmente la clase más frecuente era la frontal y que la habilidad fundamental a desarrollar era la memorización de conocimientos. La reforma, pone énfasis en procesos cognitivos, en disposiciones, en habilidades que van más allá del conocimiento. Es decir: saber, saber-hacer, saber-ser y saber-convivir.

—En una exposición anterior hablamos sobre los Objetivos Transversales. ¿También hay que calificarlos o evaluarlos? ¿Cómo se evalúan, y quién los evalúa? —consultó Rodolfo.

—Aclaremos algunos puntos —dijo el profesor Jiménez—. Objetivos transversales referidos a conductas escolares han existido siempre y seguro que ustedes recordarán que en sus informes de notas venían evaluados aspectos tales como conducta, aplicación escolar, orden, aseo, responsabilidad, etc., que tenían el fin de lograr una buena convivencia escolar y la formación de hábitos. Los profesores siempre han evaluado esto y estoy seguro que nadie se complica con seguir haciéndolo. El otro ámbito y que incluye a todos los sectores y subsectores, está referido a lo cognoscitivo, a la capacidad de análisis, de síntesis, de resolución de problemas, de expresión oral y tampoco debería haber dificultades en su evaluación ya que son aprendizajes propios de sus mismos campos disciplinares. Los que sí son nuevos son los actitudinales y las valoraciones, como la autoestima, el cuidado del medio ambiente, etc. Estos, deben ser monitoreados por la escuela, basándose en un conjunto de medidas que apoyen los valores de la institución, en especial, estipulados en su proyecto educativo.

Por lo tanto, más que instrumentos de evaluación sobre estos aspectos, hay que crear situaciones dentro y fuera del aula que favorezcan la internalización de las conductas afectivo-valóricas que ha priorizado la institución.

—A mí me complica la autoevaluación —replicó Daniel—, porque estoy seguro que los alumnos se van a colocar sólo notas buenas.

—Ustedes deben tener claridad con respecto a este punto, sabiendo que la autoevaluación no es aplicable a cualquier edad ni en cualquier ámbito, por lo tanto no es algo que se deba hacer sólo para que te reconozcan como un profesor o profesora reformista. Sí, es muy importante, instalar en los alumnos la capacidad de autoevaluarse, que sean capaces de juzgar si están avanzando hacia el objetivo propuesto y que identifiquen los obstáculos y las fortalezas. No crean que eso implica traspasarles a ellos la responsabilidad de la evaluación, ésta sigue siendo una responsabilidad del profesor. Además no tiene por qué estar referida a aspectos cognoscitivos, sino a disposiciones y comportamientos, como el trabajo en equipo, el respeto a las opiniones de los demás, el cumplimiento de los compromisos adquiridos, etcétera.

—¿Hay que considerar esa nota en el promedio? —preguntó de nuevo Daniel— ¿hay que ponderarla?

—No hay que confundir evaluar y calificar. Aquí estamos hablando de evaluar y yo sé que su primera inquietud será, que tal vez los alumnos no le darán importancia a la autoevaluación si no es calificada. Los profesores y profesoras debemos lograr esa capacidad de metacognición, por lo que es fundamental no desfallecer en su aplicación hasta que sea parte de la vida escolar.

—Profesor, en mi colegio iniciamos el proceso de reforma el año pasado —contó Rodolfo— y una de las principales dificultades en el proceso de evaluación fue cambiar las pruebas por trabajos de investigación, el famoso portafolio o carpeta, debates, proyectos, etc. ¿Es obligatorio tener que hacer esto?

—Lo que la actual reforma propone es ampliar el uso de instrumentos y procedimientos de evaluación. Las pruebas no siempre permiten evaluar todas las habilidades y capacidades requeridas, pero no significa que éstas deban desaparecer. Al contrario, deben ser mejoradas para que su aplicación enfrente al alumno o alumna a situaciones de desafío, de esfuerzo, que favorezcan su preparación para la vida adulta. Y como nombraste las carpetas o portafolio, aprovecho de decirles que este instrumento debe estar destinado a evaluar aprendizajes predefinidos. Un portafolio o carpeta no debe convertirse en una colección de trabajos sin objetivo. Si se utiliza, los alumnos deben saber para qué, cuándo incluir un trabajo en ella y si llevará nota o será parte de su autoevaluación. ¿Alguna otra pregunta?... Bien. Si no hay más preguntas, dejamos el tema de la evaluación hasta aquí. La idea es darles un barniz y la responsabilidad de ustedes es seguir conversando, profundizando y tomando acuerdos para mejorarla. Con este tema tan simple y tan complejo a la vez, damos por finalizado el curso, sobre los nuevos planes y programas de estudio, metodologías y evaluación. Les deseo un exitoso año escolar y muchas gracias por su atención.

Un gran aplauso coronó una semana de arduo trabajo y profundos aprendizajes facilitadores de cambio.

UN MUNDO SIN NÚMEROS

Después de una semana intensiva y de mucho análisis sobre el quehacer educativo, a Daniel, aún le rondaba en su cabeza el "abajo Baldor". Había llegado el momento de llevar a la práctica todo lo aprendido en el curso. En los próximos días se daba inicio a las clases y debían prepararse para ese profundo cambio.

—¿Cuál es la primera unidad en primero medio? —preguntó Daniel.

—"Números" —respondió Camila— En esta unidad tenemos que incorporar los números racionales e irracionales.

—¿Y de qué forma vas a iniciar la unidad? —preguntó desconcertado Daniel—, porque después del curso, todo el material que tengo y que he acumulado durante años, me parece que no corresponde.

—Nunca tanto Daniel —respondió Camila con una sonrisa—, lo que tenemos que hacer es adaptar nuestro material. Incorporarle vida y actualidad.

—Linda tu frase, pero no lo veo tan fácil —dijo desanimado Daniel.

—Planifiquemos las primeras clases, día a día —dijo con decisión Camila— y verás como todo se va a ir dando como queremos a medida que transcurra el año escolar.

—Está bien —respondió Daniel, no muy convencido, pero dispuesto a intentarlo.

—Las primeras clases tenemos que conocer a nuestros alumnos y ver el nivel matemático que traen —comenzó Camila—. Sabemos que siempre en primero medio se incorporan muchos alumnos nuevos y debemos tratar de nivelar una base que nos permita trabajar a futuro sin dificultades. Independientemente de la prueba de Diagnóstico, podemos plantear en clase algunas situaciones matemáticas que nos den luces sobre los aprendizajes previos de nuestros alumnos.

—¿Te refieres a darles algunos problemas para que ellos los resuelvan? —preguntó Daniel.

—Sí, pero problemas motivadores que apunten hacia lo que queremos evaluar.

Y ambos pusieron todo su empeño y conocimientos en esta planificación inicial.

Aquel día sería inolvidable para Daniel, iba hacia la sala con su Libro de Clases bajo el brazo y con un sinfín de ideas rondándole la cabeza. Esperaba que lo planificado con Camila diese resultado; él aún no estaba muy convencido, pero sabía que tenía que intentarlo.

Después de la presentación y de pasar la lista, inició su actividad diciendo:

—Mis queridos alumnos y alumnas. Hoy iniciaremos un maravilloso viaje por el mundo de las matemáticas. Y cuando digo esto, muchos pensarán en un mundo lleno de números, símbolos, problemas y dificultades, pero enseguida les digo que se equivocan.

Los alumnos estaban desconcertados. No lograban comprender a qué quería llegar con esa afirmación.

—Miren a su alrededor —continuó—, la sala, las mesas, sus cuadernos, las baldosas del piso, el pizarrón, etc. ¿Saben dónde se encuentran todas esas cosas? La respuesta fue un completo silencio. Nadie parecía comprender la pregunta del profesor.

—En el mundo de las matemáticas —afirmó muy seguro de lo que decía, Daniel. Un mundo hermoso que los invito a conocer y a vivir. Un mundo donde la magia matemática te acompaña cada día, te desafía y te motiva a crecer, donde los números son nuestros amigos, nuestros aliados.

—Imagínense un mundo sin números. Imaginen que cierto día se decide colocar todos los números en una nave espacial; los teoremas, los libros de matemáticas, las calculadoras y hasta los profesores de matemática. Sonrió al decir esto último. En un primer momento muchos dirían: “por fin”, “adiós fracaso escolar”. Las noticias anunciarían “se acabaron los rojos en las escuelas” o “el mundo libre de los números”. Pero a los pocos días, comenzarían muchos problemas; al levantarte en la mañana nadie sabría qué hora es para irse al trabajo, ni la fecha en que estamos, los billetes no tendría su valor indicado, las casas sin un número que las identifique, no habría Kino ni lotería para jugar, no podríamos saber la temperatura exacta, menos pagar una cuenta, ni comprar en el supermercado. Los científicos ya no podrían calcular nada, se pararían las industrias y los gobiernos no sabrían cómo calcular el costo de la vida, el IPC, etc., etc., etcétera.

—No podríamos sacar nuestros promedios —aportó Ester.

—Y los carpinteros no podrían construir nada —agregó Elena.

—Y ya no habrían competencias deportivas—dijo Andrés.

—Exactamente —confirmó Daniel—, les aseguro que en menos de un mes estarían todos pidiendo que la nave espacial volviera con todo su cargamento matemático. Y gracias a eso podríamos volver a la magia de los números y de las matemáticas.

—Y yo —dijo Daniel— podría escribir en la pizarra el número 19.998 y saber que con él puedo hacer magia.

—Nunca tanto —dijo Ángel riendo.

—¿No crees que pueda hacer magia con este número? —replicó Daniel. —Espera y verás.

Se dirigió a Ricardo y le dijo: —Ricardo, ¡dime un número cualquiera de 4 cifras!

— 5.724 —respondió Ricardo.

—¡Muy bien! Yo voy a colocar, bajo él, otro cualquiera —y anotó 4.275.

—Tú Nicol, ¡Dime otro número de cuatro cifras.

—1.849 —respondió Nicol.

—Bien, yo agregaré otro más y escribió rápidamente el número 8.150.

—Ahora, los invito como primera actividad matemática a que sumemos estos números.

Y entre todos fueron sumando columna a columna, en la forma tradicional, y finalmente obtuvieron el resultado 19.998, para sorpresa de todos, era el mismo número que Daniel había escrito en la pizarra al inicio de la actividad.

El asombro inundó la sala y se escucharon las primeras interrogantes.

—¿Cómo lo hizo señor?

—Señor, ¡enséñenos cómo se hace!

—¡No tengo problemas en decirles cómo se hace! —respondió Daniel—, pero me gustaría mucho más que ustedes mismos descifraran el misterio.

Todos se involucraron en el dilema y comenzaron a extraer algunas conclusiones.

—¡Señor! —dijo Ángel, alzando la mano— ¡creo saber la respuesta!

—Cuando Ricardo dijo 5.724, usted colocó el siguiente número de modo tal que la suma de cada columna fuese dando 9. Lo mismo ocurrió cuando Nicol le dijo el segundo número. Por eso al sumar todo, siempre nos iba dando 18 y con la reserva 19.

—Excelente Ángel, ¿comprendieron todos la explicación? —preguntó Daniel

—¡Siii! —respondieron a coro los alumnos.

—Ahora, —prosiguió Daniel—, quiero que resuelvan un nuevo desafío que tiene que ver con la operatoria de 7º y 8º. Formen, utilizando 4 cuatros y las operaciones básicas, los números del 0 al 9, sin olvidar que existe en matemática un orden para operar. ¿Se acuerdan cuál es?

—Primero las multiplicaciones y divisiones, luego las sumas y restas —respondió Estefanía.

—¿Y si la expresión tiene paréntesis? —dijo Daniel.

—¡Entonces se resuelven los paréntesis primero! —aclaró Estefanía.

—Para que quede más claro aún, yo iniciaré este desafío, formando el número 2 y anotó en la pizarra $4:4+4:4$. Con ese ejemplo fue suficiente y todos comenzaron a formar los restantes números.

—¡Señor! ¿Se pueden utilizar paréntesis y potencias? —preguntó Ester.

—Si te sirven para obtener algunos de los números no hay problema, pero no te olvides de la condición. Sólo debes usar 4 cuatros —le respondió Daniel, mientras iba observando uno a uno el trabajo que estaban realizando sus alumnos.

Un rato más tarde, habían terminado la actividad con algunas dificultades para encontrar el 4 y el 5. Para revisar sus procedimientos, fueron pasando a la pizarra y anotando la expresión matemática que habían encontrado para cada número. Algunos de estos, incluso tenían más de una expresión correcta.

—Para finalizar la clase —agregó Daniel—, quiero dejarles el siguiente desafío.

Dibujó en la pizarra una letra M de gran tamaño y luego trazó en ella tres líneas rectas y marcó con números los triángulos que se habían formado, descartando los sobrepuestos, siendo un total de 6 triángulos.

Se dirigió al curso y dijo:

—El desafío es formar 9 triángulos, utilizando la M y esas tres rectas —señalando la figura recién dibujada. —La próxima clase me dan su respuesta.

Daniel, terminó su clase y se retiró a la sala de profesores, a disfrutar su acostumbrado café. Allí, se juntó con Camila e intercambiaron las primeras impresiones.

—¿Cómo te fue? —preguntó Camila, con una ligera ansiedad.

—Bastante bien —dijo Daniel—; los alumnos participaron en todas las actividades propuestas y manifestaron que la clase estuvo entretenida.

—¿Pero?...

Camila conocía muy bien a Daniel y sabía que él no estaba conforme.

—¡Extraño mi clase tradicional! —exclamó Daniel. Me da la impresión de haber perdido una clase en la que podríamos haber comenzado con un nuevo contenido y haber hecho muchos ejercicios.

—Sí, ¡muchos ejercicios! Pero… ¿Para quién? ¿Para los diez de siempre? ¿Para los que saben y les gusta la matemática? ¿Y los demás?... ¿No te das cuenta que estás sembrando en ellos el bichito de las matemáticas y que el comienzo va a ser lento y tal vez difícil, pero los beneficios, enormes? Te aseguro que en un tiempo más, ya no tendrás alumnos que odien la matemática y que vayan con desagrado a tu clase, y esos diez que saben hacer muchos ejercicios, más los otros veinticinco, sabrán por qué y para qué lo están haciendo, es decir, una matemática con sentido…

—Veo que estás impregnada de renovación —le expresó Daniel.

—Es que he estudiado y analizado mucho la nueva propuesta para el aprendizaje de la matemática y estoy totalmente de acuerdo con ella.

—Creo que con lo que me sugieren que haga, más mi experiencia, la tuya y la de todos mis colegas, tendré las armas para ayudar a mejorar el deficiente aprendizaje en matemática que existe hoy día.

—¡Bien, Camila! Te felicito por tu buena intención. Yo también lo intentaré y espero que todo resulte como queremos.

TEMOR, MONEDAS, DADOS Y AZAR

Camila llegó acelerada esa mañana. Firmó el libro de asistencia y buscó rápidamente el material que necesitaba, dirigiéndose a la sala de trabajo que le habían asignado al Departamento de Matemática.

—¡Hola Daniel!

—¡Hola! ¿Qué pasa? Te noto un poco intranquila.

—Lo que pasa, —comentó preocupada Camila—, es que anoche estuve revisando el programa del MINEDUC y el contenido que nos corresponde, en segundo medio, como primera unidad es nada menos que probabilidad. Yo pensé que venía más adelante.

—Ahora te entiendo —respondió pensativo—. Francamente, es primera vez que siento temor al comenzar un año escolar. Me siento como profesor principiante y creo que tiene que ver con el poco dominio que tengo de algunos temas nuevos incorporados a los planes y programas, tales como las probabilidades o las transformaciones isométricas. Jamás había escuchado de estas últimas y por supuesto que no me las enseñaron en la universidad.

—Pues yo, tengo la misma dificultad. Durante mi carrera tuve que aprender límites, derivadas, integrales dobles, triples y un montón de cosas más que jamás he tenido que enseñar en la Media. Y lo más curioso, es que nunca tuve asignaturas que me preparan realmente para lo que iba a tener que enseñar.

—Bueno, también yo pasé por la misma situación —reconoció Daniel—. Cómo será, que ni siquiera tuve geometría plana, pero dejemos de quejarnos que eso ya no tiene remedio y preparemos nuestras clases.

—Tienes razón —rezongó Camila—, mientras buscaba algunos apuntes. Pero sería bueno que las autoridades educacionales, así como nos hacen involucrarnos en una reforma, también la hagan extensiva a las universidades, ya que no veo lógica a que un nivel se haga parte de un cambio tan profundo y otro no.

—Tranquila mujer. Estoy seguro que eso se dará con el tiempo. Lo importante, por ahora, es basarse en las orientaciones del MINEDUC, ya que eso nos permite movernos en un área cierta y segura, al menos hasta que ocurran los cambios que esperamos.

Recuerda que debemos explicar uno de los conceptos fundamentales, el de variable aleatoria, que son cantidades o magnitudes susceptibles de variar al azar. Es decir, cuando se asocia un número x a cada resultado posible de un experimento aleatorio, este número recibe el nombre de variable aleatoria.

—Lo sé —señaló Camila—, incluso lo explica el experimento de escoger de un árbol, una manzana al azar y pesarla. El peso será una variable asociada a cada manzana y como la manzana fue escogida aleatoriamente, su peso será una variable aleatoria.

—Y también nos aclara —completó Daniel— que una vez escogida una manzana específica, su peso ya no es aleatorio. Y que el mismo experimento aleatorio permite definir diferentes variables aleatorias. En lugar del peso de la manzana, podría determinarse su volumen.

—Ayer, buscando material para la clase de probabilidades, encontré unos apuntes que nos pueden servir.

Camila cogió uno de sus apuntes y se lo pasó a Daniel. Este comenzó a leerlo en voz alta: "El primer libro sobre teoría de la probabilidad es el "Manual sobre juegos de azar" de Girolamo Cardano alrededor de 1550, que está básicamente dedicado al juego del dado y que fue publicado unos cien años después de su muerte. Galileo también se interesó por los juegos de azar y escribió un folleto titulado "Descubrimientos sobre los juegos con dados" publicado en 1718."

—Veo que los primeros estudios están relacionados con los dados —dijo Daniel— luego, lo más lógico sería partir de esa manera en clases. ¿Qué te parece?

—Muy bien —apoyó Camila— y lo podemos hacer basado en el problema del Duque de Toscana.

—¿Y de qué trata eso? —preguntó Daniel frunciendo el ceño.

—Te cuento —dijo sonriendo Camila por la cara que había puesto su compañero de labores.

—El duque de Toscana fue un jugador empedernido, especialmente con los dados y observó que en un juego en el que se tiran tres dados y se suman las pintas obtenidas, siempre se obtenía más veces 10 que 9. Lo que le extrañaba era que ambas sumas se pueden obtener siempre de 6 maneras: el 9 como 1+2+6; 1+3+5; 1+4+4; 2+2+5; 2+3+4; 3+3+3, mientras que 10 se obtiene por 1+3+6; 1+4+5; 2+2+6; 2+3+5; 2+4+4; 3+3+4.

—Muy interesante y motivador —comentó Daniel.

—Esto le fue consultado a Cardano —prosiguió Camila—, pero no dio una respuesta satisfactoria y se tuvo que esperar 50 años más para que Galileo diera con la solución, considerando, por ejemplo, que 1+2+6 era distinto a 1+6+2 y a 2+1+6, etc. En conclusión, Galileo determinó que hay 25 maneras distintas de obtener 9 y 27 maneras distintas de obtener 10.

—En conclusión —afirmó Daniel—, es normal que dé 10 con más frecuencia que 9.

—Exactamente —apoyó Camila— y ese puede ser nuestro punto de partida en probabilidades. Es cosa de pedirle a nuestros alumnos que traigan 3 dados por grupo y que realicen algo similar al problema del duque de Toscana.

—Excelente —exclamó Daniel y le gustó el rumbo que estaba tomando la preparación de clases.

—Otra situación que podemos considerar, es el trabajo con monedas, que también tiene que ver con un error histórico —Camila buscó entre sus apuntes.

—Ese hecho es conocido como el error de D'Alembert —dijo Daniel mientras se acomodaba en su silla para explicarlo.

Jean D'Alembert fue un famoso matemático francés del siglo XVIII y que en el año 1754 planteó el problema: ¿cuál es la probabilidad de obtener cara por lo menos una vez al lanzarse dos monedas?

—Pero… ¡yo no veo dificultad en determinar eso! —expresó Camila.

—Es porque ahora ya lo tenemos muy claro, pero en ese tiempo no habían muchos estudios sobre esas situaciones. Según D'Alembert, las posibilidades eran que saliera cara en el primer lanzamiento, cara en el segundo lanzamiento o ninguna cara, por lo que tenía 3 casos posibles, de los cuales 2 eran favorables, es decir, determinó que la probabilidad buscada era $\frac{2}{3}$

—Pero eso es un error —señaló Camila. Tomó un papel y escribió:

Cara-Cara, Cara-Sello, Sello-Cara, Sello-Sello

Es decir, la probabilidad es $\frac{3}{4}$

—Así es —confirmó Daniel— pero son los errores esperados cuando se inicia el estudio de un conocimiento, en este caso, las probabilidades.

—Por lo tanto, en ese error tenemos otra actividad para hacer en clases. Podemos partir haciendo que en grupos de dos, lancen una moneda 50 veces y que vayan anotando la cantidad de caras y sellos obtenidos. Luego, sumar el total de todo el curso y sacar conclusiones. Posteriormente, pasar al lanzamiento de dos monedas.

—Y con eso, más algunos ejercicios que aparecen en el texto, ya tenemos cubierto lo que se refiere a la definición de probabilidad —dijo Daniel.

—Incluso podemos darle como investigación que determinen la probabilidad de ganarse el Kino.

—¡Estupenda idea! —exclamó Daniel—. Definiéndoles primero factorial de un número y la fórmula de combinatoria. Claro que para revisarlo posteriormente tenemos que obtener el resultado nosotros primero.

—¿Y qué esperamos? —señaló Camila sonriendo y sacando su calculadora.

—Como cada cartón tiene 15 números impresos entre los números 1 y 25, entonces debemos resolver…

$$\frac{1}{\binom{25}{15}} = \frac{1}{\frac{25!}{10!\cdot 15!}} = \frac{10!\cdot 15!}{25!} =$$

$$\frac{10!\cdot 15!}{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15!} =$$

$$\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}$$

—Simplificando y multiplicando — dijo Camila— resulta…

$$\frac{1}{3.268.760} = 0{,}00000031$$

—Esa es la probabilidad de ganar el Kino —comentó satisfecho Daniel.

—Y podemos afirmar este conocimiento, pidiéndoles que saquen la probabilidad de obtener 14 aciertos, 13 aciertos y 12 aciertos. ¿Te parece?

—Correcto y podemos iniciar la próxima clase con los problemas planteados por el Caballero de Meré el año 1650.

—¡Estupendo! Es la introducción perfecta para iniciar el estudio de la probabilidad condicionada.

—Aquí tengo el enunciado:

Dos personas, Alberto y Berta, participan en un juego donde las dos tienen la misma probabilidad de ganar. El primero que gane cinco veces, cobra el premio de 4.200 francos franceses.

Desgraciadamente, después de lanzar la moneda siete veces hay que suspender la contienda; en ese momento A, ha ganado 4 veces y B, ha ganado 3 veces. ¿Cómo tiene que dividirse el premio entre los dos jugadores?

—¡La jornada ha sido muy beneficiosa! —exclamó satisfecha Camila.

—Por supuesto —afirmó Daniel— trabajando en equipo todo se hace más fácil.

—Me parece que antes no opinabas lo mismo —dijo maliciosamente Camila.

Daniel se puso de pie, sonrió y se retiró cantando: "Cambia, todo cambia…"

LAS AGUJAS Y UN ENIGMA

Aquella mañana, Daniel, estaba bien preparado para realizar una actividad novedosa, que a la vez permitiría a los alumnos concluir algunas situaciones matemáticas.

“Ya que estamos trabajando con las probabilidades —comenzó Daniel— hoy, vamos a realizar un experimento que estoy seguro les va a interesar. Se relaciona con un naturalista y matemático francés llamado Georges Louis Leclerc de Buffon, quien nació el año 1707 y murió en 1788. Él, fue uno de los primeros en trabajar el concepto de probabilidad geométrica y además escribió un monumental tratado llamado ‘Historie Naturelle’ que consta, nada menos, que de 44 volúmenes.

Para realizar esta actividad —continuó Daniel— quiero que dibujen en su cuaderno una rejilla de 7 líneas horizontales de unos 10 cm de ancho, separadas por 1,3 cm”.

Y mientras los alumnos hacían los respectivos rayados, Daniel comenzó a repartir unos palillos a cada uno.

—¿Listos? —preguntó Daniel.

—Siiii —respondieron como siempre los alumnos.

—Les acabo de entregar a cada uno 4 palillos iguales. Van a tirar estos palillos sobre el enrejado que hicieron y si un palillo cae sobre una línea o atraviesa una línea se anota un punto. Efectúen el lanzamiento 25 veces y cuando tengan el total de puntos, vamos a juntarlos todos anotándolos en la pizarra y sacaremos la relación entre el total de palillos lanzados y el total de puntos obtenidos.

Durante algunos minutos, todos se dedicaron a lanzar sus palillos sobre las líneas que cada uno dibujó. Una vez que todos terminaron y contabilizaron los puntos obtenidos se llegó al trabajo final.

—Bien, ¿Cuánto nos da la suma total de todos los puntos? —preguntó Daniel.

—Da 1.157, señor —respondieron varios alumnos.

—Cada uno realizó 25 lanzamientos lo que hace un total de 100 palillos lanzados —calculó Daniel.

—Y como somos 36 alumnos, en total se lanzaron 3600 palillos —concluyó Mario.

—Efectúen la división $\frac{3600}{1157}$ —sugirió Daniel.

—Da 3,111495…—respondió Sofía.

—¿Qué número les recuerda el resultado obtenido? —preguntó Daniel.

—Se parece al valor de Pi —respondió Mario.

—Exactamente —dijo Daniel—, a eso quería que llegáramos. Que a medida que el número de lanzamientos crece, la razón entre los lanzamientos y el número de veces que la aguja toca alguna de las líneas se aproxima cada vez más al número Pi.

—Profesor —dijo Álvaro—, los palillos que nos repartió son todos iguales, ¿Resultaría lo mismo sin son distintos?

—No daría el mismo resultado —respondió—, todos los palillos deben ser de igual tamaño y su medida debe corresponder a la mitad de la separación entre las líneas.

—O sea, que dibujamos líneas con una separación de 1,3 cm entre sí, porque los palillos que usted nos dio miden la mitad, es decir, 0,65 cm —señaló Mario.

—Correcto Mario —afirmó Daniel—. Así que si quieren repetir el experimento deben considerar las relaciones de medidas que Mario acaba de concluir.

—Y la pregunta del millón: ¡señor! —dijo Raquel—, ¿Lo que hicimos tiene alguna aplicación en la vida real?

Y como siempre, tras esa temida pregunta a los profesores, el curso hizo un expectante silencio.

—Es difícil de creer, pero sí y no una sola —respondió Daniel—. Tiene aplicación en la Cartografía. Por ejemplo, para determinar la longitud de un río, aunque para ello se debe aplicar una matemática un poco más avanzada. Pero si alguien quiere ejemplos específicos, les recomiendo el libro "La Probabilidad y sus Aplicaciones" que escribió un famoso matemático llamado Luis Santaló.

—Y no sólo eso —finalizó Daniel— el problema de la aguja de Buffon es la esencia de dos ramas de la Matemática; la Geometría Integral y la Estereología, contenidos que se trabajan a nivel universitario.

—¿Y qué es la Estereología? —dijo Sofía.

—La estereología —explicó Daniel—, comprende un conjunto de métodos para la exploración tridimensional del espacio, y permite conocer, por ejemplo, el número de partículas o la curvatura total de una superficie. Tiene una relación muy estrecha con aquellas disciplinas científicas que utilizan un microscopio para su desarrollo. Por ejemplo, para saber si una determinada droga es la causante de la pérdida de células de un órgano. La estereología también sirve de ayuda en el diagnóstico basado en imágenes obtenidas mediante resonancia magnética u otras técnicas, para averiguar cuánto ha crecido un órgano o tumor.

—Señor, ¿y dónde aprendió todo eso? —preguntó Sofía sorprendida.

—Preparando esta clase encontré toda esa información, más otros aportes de la profe Camila.

Como pueden ver —concluyó Daniel— algo que parece intrascendente como lanzar unos palillos a unas líneas, ha pasado a ser de vital importancia en la ciencia de hoy.

Bien, espero que les haya gustado la actividad de hoy y hayan aprendido algo más de la matemática.

—Si profe, súper entretenido —dijo Raquel.

—Quiero terminar esta clase, planteando un desafío para que lo traigan resuelto la próxima semana. Está referido a un gran enigma, un verdadero rompecabezas que Alberto Einstein escribió siendo muy joven. Según el científico alemán, el 98 por ciento de la gente del mundo es incapaz de solucionarlo.

—¿Tan difícil es? —preguntó Lorena,

—Es de mucha lógica y para solucionarlo, se debe seguir un procedimiento ordenado —respondió Daniel—. El problema es el siguiente:

Hay cinco casas y cada una de ellas es de diferente color. En cada casa vive una persona de nacionalidad diferente. Estos cinco propietarios son adeptos a un cierto tipo de bebida, fuman una marca de cigarros en particular y tienen un animal característico como mascota. Ninguna de estas personas tiene la misma mascota, fuma la misma marca de cigarros o gusta de la misma bebida. Y la pregunta final es ¿Quién es el dueño del pez?

Un signo de interrogación se dibujaba en la expresión del rostro de sus alumnos al terminar de leer el problema. Daniel no pudo resistir la tentación de reírse y mientras lo hacía, repartió a cada uno una hoja impresa.

—En la hoja que les estoy entregando —explica— está el enunciado del problema y las pistas que les ayudarán a resolver este interesante enigma.

—Esteban, ¿Podrías leer las pistas por favor?

—Sí señor —dijo Esteban, en voz alta y clara:

1. El hombre inglés, vive en la casa roja.
2. El sueco tiene perros en su casa.
3. El danés, bebe té.
4. La casa verde está situada a la izquierda de la casa de color blanco.
5. El dueño de la casa verde, bebe café.
6. La persona que fuma cigarros Pall Mall, cría pájaros.
7. El dueño de la casa amarilla, fuma Dunhill.
8. El hombre que vive en la casa ubicada exactamente a la mitad de las demás, bebe leche.
9. El noruego, vive en la primera casa.

10. El hombre que fuma Blend, vive al a lado del que tiene gatos.
11. El hombre que tiene caballos, vive al lado del tipo que fuma Dunhill.
12. El individuo que fuma Blue Master, bebe cerveza.
13. El alemán, fuma Prince.
14. El noruego, vive junto a la casa azul.
15. La persona que fuma Blend, tiene un vecino que bebe agua.

—¡Gracias Esteban! Espero que pasen "unos días muy entretenidos, solucionando este problema". —Estoy seguro que lo lograrán.

Se despidió del curso y se retiró, mientras ya algunos comenzaban a darle las primeras vueltas al enigma.

CONOCIENDO LA PSU

El cuarto año medio plantearía a Daniel y Camila nuevos desafíos. La planificación no sólo debe cubrir el currículo sino también la preparación para la Prueba de Selección Universitaria, preocupación anual de alumnos padres y colegio en general.

—¿Cómo vamos a preparar a los chicos para la PSU, este año? —preguntó Daniel a Camila.

—No lo sé todavía —respondió Camila—, pero tenemos que ponernos de acuerdo, respecto de cómo, cuándo, qué contenidos vamos a priorizar y si haremos sólo ensayos o también repasaremos las materias.

—Pienso que podríamos recortar una hora al plan de estudio el primer semestre, para hacer repasos, ampliar a dos el segundo semestre y coordinar los ensayos mensuales con el Departamento de Lenguaje.

—Afortunadamente el plan de cuarto es breve, por lo que no tendremos problemas para hacer las adecuaciones —recordó Camila.

—Podríamos comenzar, detallando a los alumnos las características de la Prueba, tales como cuántas preguntas de cada materia contiene, cuáles ocupan más tiempo, qué materia requiere una mayor y mejor preparación dada su dificultad, etc. —sugirió Daniel.

—Pero…, el número de preguntas no es fijo, —aseguró Camila.

—No, pero la variación es muy mínima y si quieres, podemos verificarlo en los ensayos anteriores.

—Está bien, tú eres el de la experiencia, estás más informado que yo, así que ¡dime! —y Camila se dispuso a anotar.

Daniel entregó a Camila la siguiente clasificación de preguntas de PSU:

Números y Proporcionalidad, 10 preguntas; Álgebra y Funciones, 29 preguntas; Geometría, 21 preguntas; Estadística y Probabilidad, 10 preguntas.

—Podríamos desmenuzar un poco más estos temas para determinar la cantidad de preguntas por cada contenido —señaló Camila.

—Eso ya es algo más difícil —dijo Daniel pensativo—, pero podríamos intentarlo porque en algunas materias se mantiene casi fijo, como en logaritmo que aparece generalmente una pregunta, máximo dos. Lo mismo ocurre con la exponencial y con preguntas que son típicas, como, si $3^x + 3^{-x} = m$, determinar $9^x + 9^{-x}$.

—¿Y cómo haces para estar tan informado de esos detalles? —preguntó curiosa Camila.

—Leyendo o escuchando todas las informaciones que aparecen respecto a la prueba. También, analizando cada facsímil oficial, pregunta a pregunta y a través de la información de mis alumnos. Tú has visto que después de rendir la PSU de matemática la mayoría de los alumnos viene al colegio y nos juntamos en una sala, allí me dan a conocer las preguntas que les aparecieron y nos dedicamos a reconstruir el ensayo, generalmente logramos armar unas 60 preguntas de las 70.

—Es bueno saber cómo trabajas —dijo Camila— yo, sólo llevo dos años preparando alumnos para la PSU y necesito el máximo de apoyo.

—Por supuesto y en eso estamos.

—El tema que debemos preparar muy bien, es el de probabilidades ya que aparecen entre 4 y 5 preguntas en la prueba y ya sabes que a los alumnos les cuesta entenderlo.

—No sólo a ellos —reconoció Camila—. Por lo mismo, lo estoy estudiando mucho. En probabilidades, me cuesta visualizar la forma de abordar algunos de los problemas para resolverlos. ¿Te pasó a tí lo mismo, cuando comenzaste a estudiarlos?

—¡Exactamente lo mismo! —respondió Daniel—. Los contenidos de probabilidades no son muchos, pero cuando se ejercita, la variedad y cantidad de problemas que surgen requieren de mucho análisis.

—¿Qué otro tema tiene un número importante de preguntas? —inquirió Camila.

—Son varios, pero hay que tener especial cuidado con Transformaciones Isométricas. Recuerda que nuestros alumnos que ahora están en cuarto medio, no vivieron la reforma curricular en primero, porque en ese tiempo, aún no se habían incorporado. Eso significa que no tienen conocimiento sobre el tema.

—Entonces, probabilidades y transformaciones isométricas debieran ser las primeras materias en tratarse este año —concluyó Camila.

—No necesariamente —respondió Daniel—, debemos planificar nuestro trabajo y podemos hacerlo siguiendo el mismo orden en que se pasaron los contenidos durante la educación media. Lo importante es asegurarles a los alumnos que todos los contenidos van a ser repasados.

—¿Qué fórmulas utilizas para determinar los puntajes? —preguntó Camila, cambiando de tema.

—Si aplico un ensayo de 70 preguntas utilizo la fórmula

$$\left(C-\frac{I}{4}\right)\cdot 8{,}6+248$$

donde C corresponde a las preguntas correctas e I a las incorrectas.

—¿Esa es la fórmula oficial? —preguntó Camila.

—No existe una fórmula oficial —le respondió Daniel— existe una tabla, elaborada por el DEMRE, que se basa en las preguntas correctas y en las incorrectas, que asignan al puntaje corregido, un determinado puntaje final.

—Tenemos claro —comentó Camila— que los contenidos que se pasan en tercero y cuarto medio del plan diferenciado de matemática, no entran en la PSU.

—Sólo los del plan común, además es conveniente saber los tipos de preguntas que no aparecerán jamás en una PSU.

—¿Cómo cuáles? —volvió a preguntar Camila.

—Como el cubo de un binomio, o números complejos, o trigonometría avanzada, o matrices, determinantes y muchos más.

—Entonces si no entran en la PSU podríamos ocupar las horas del plan diferenciado de cuarto, en prepararlos para la prueba —opinó Camila.

—No, ese sería un grave error, ya que los alumnos que optaron por ese plan, pretenden seguir con una carrera relacionada con matemática, lo que significa que en algún momento, van a necesitar esos contenidos. Sería muy irresponsable de nuestra parte no enseñárselos, ya que su futuro depende de esta decisión. Además, sabemos que la PSU no lo es todo y no debemos darle más importancia de la que tiene.

—Ahora que lo dices, tienes toda la razón —reconoció Camila—. Me había entusiasmado más de la cuenta.

—Eso creo —respondió Daniel con una sonrisa—. Está bien que queramos obtener un buen puntaje para nuestro colegio, pero no a costa del futuro de nuestros alumnos. Es fundamental, que al cuarto diferenciado le pasemos una introducción al cálculo que considere lo básico de los límites, las derivadas y si alcanza el tiempo, de las integrales.

—Para que no sufran tanto con el ramo de Cálculo en la universidad —comentó Camila.

—Exactamente y si es posible, desde el punto de vista de la aplicación y de la geometría, para que comprendan mejor esos complicados temas —sugirió Daniel.

—¿Qué tipo de preguntas aparecen en los contenidos como raíces, sistemas de ecuaciones, ecuación de segundo grado, etcétera? —preguntó Camila.

—A veces, en clase nos "volamos", como dicen nuestros alumnos, con enormes y extensos ejercicios y no le damos prioridad al entendimiento básico de cada propiedad ni a su aplicación que será en definitiva lo que afianzará el conocimiento del alumno. Y cuando uno revisa un ensayo oficial de la PSU se da cuenta que las preguntas tienen otro enfoque con respecto a lo que uno trabaja en clases, un enfoque más simple. Por ejemplo, en raíces preguntan algo cómo $\left(5\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+5\sqrt{2}\right)$, es decir, una suma por su diferencia con raíces. Estoy seguro que en clase se han resuelto ejercicios diez veces más complicados que este.

—Pero si es así, ¿por qué a los alumnos les va mal? —preguntó intrigada Camila.

—Porque no ha habido suficiente comprensión del tema, porque los ejercicios que les damos, son resueltos y comprendidos por la tercera parte del curso. Los otros dos tercios toman apuntes y memorizan para las pruebas, y con eso les basta para ir aprobando, pero como se dice "la memoria es frágil" y cuando llegan a cuarto medio y deben enfrentarse a la PSU, se dan cuenta que no saben nada de matemática.

—Bastante lapidario tu comentario —señaló Camila.

—Bastante realista —le corrigió Daniel— y eso es lo que la educación matemática actual pretende cambiar y de lo que nos hablaban los profesores del curso que hicimos al inicio del año escolar.

—Un gran tema —dijo Camila.

—Por ejemplo, en ecuaciones de segundo grado, hay que resolver ejercicios como $x^2+1=x+1$; en ecuaciones de primer grado, algo como $5\cdot 3\cdot(2x+4)=30$ y en sistemas de ecuaciones nos dicen que $x+y=7a+3b$ y que $x-y=7a-3b$, etc.

—Preguntas muy simples —reconoció Camila.

—Hasta en probabilidad, que nos preocupa tanto, se pueden encontrar preguntas que podríamos denominar como "fáciles". Por ejemplo: Si en tres lanzamientos de un dado sale un 5, ¿cuál es la probabilidad de que en el próximo lanzamiento salga un 5?

—Y de valor absoluto, ¿sale alguna pregunta? —consultó Camila.

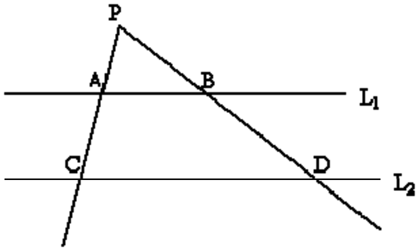
—Una pregunta, que puede estar basada en la operatoria con signos donde basta saber la definición para resolverlo correctamente —respondió Daniel. Por ejemplo —continuó— dado:

$f(x)=3|1-x|-x$

determinar $f(-2)+f(-1)$. También la pregunta puede referirse a la representación gráfica de la función valor absoluto, en especial sobre su ubicación en el sistema de coordenadas.

—De geometría, ¿qué me puedes contar? —inquirió Camila.

—Lo mismo que en lo algebraico, preguntas sencillas que buscan el conocimiento básico del alumno de los contenidos abordados en la media. El Teorema de Thales, con la aplicación de la misma proporción que salía antes en las pruebas específicas, por ejemplo —dijo Daniel, dibujando en una hoja la típica figura de Thales—, se dan los valores de AP, AB, AC y nos piden determinar CD.



—Que es muy fácil de determinar —señaló Camila.

—Pero que también es el tipo de pregunta en el que más se equivocan los alumnos. Aunque que cada año les advierto que esta relación de Thales va a salir en la prueba, algunos alumnos reconocen, que a pesar de las reiteradas advertencias, igual la tuvieron mala.

—¿Y por qué será eso? —preguntó Camila.

—Ahora sé por qué —le respondió Daniel con firmeza en sus palabras—. En el curso que tuvimos comprendí que mi único objetivo era que memorizaran el Teorema de Thales y jamás lo aplicamos en alguna situación problemática significativa para ellos, obviamente, esta falta de aplicación, hizo que lo olvidaran.

—En algunos ensayos vi varios ejercicios de circunferencia —señaló Camila.

—Sí —señaló Daniel—, aparecen algunos referidos a los ángulos inscritos y del centro. También sobre la proporcionalidad de trazos en la circunferencia.

—¡Uf! Que tarde es—interrumpió Camila, mirando su reloj—, la próxima reunión planificamos en detalle y gracias por ayudarme en esto que es relativamente nuevo para mí.

—Cuando gustes —respondió Daniel despidiéndose de Camila.

CÁLCULOS Y TEMBLORES

—¡Me pillaron! —dijo Daniel cuando entró a la sala de profesores y todos se miraron algo preocupados. ¡Me pillaron! —volvió a repetir.

—¿Qué te pasa Daniel? ¿Algún problema? ¿Te pasó algo? —las interrogantes llovieron.

—Para ustedes, tal vez no signifique mucho, pero estoy muy molesto.

—Seguramente mis alumnos de cuarto medio no se están comportando como debieran —expresó Sandra, la profesora jefe—. Voy a tener que conversar con ellos.

—No, Sandra… el problema soy yo. ¡Imagínate! Llevo como veinte años enseñando matemática y en medio de la clase un alumno me pregunta… ¿para qué sirven los logaritmos? y apenas pude darle una vaga explicación.

Daniel, secó sus transpiradas manos y continuó el relato.

—Todo el curso se dio cuenta que no sabía mucho sobre el tema —suspiró mortificado Daniel—, claro que me comprometí a tenerles la información para la próxima semana, pero me duele no haberlo investigado antes ya que esa es mi responsabilidad como educador. Piensen ustedes… Veinte años trabajando con un contenido del que manejo todas sus propiedades, tipos de ejercicios, graficas, pero tengo escaso conocimiento sobre su utilidad.

Ya un poco más tranquilo, se sentó y preparó un café y su mente comenzó un viaje que nadie se atrevió a interrumpir.

Esa tarde se reunió con Camila y le contó todo lo sucedido.

—Lo que pasa Daniel —comentó Camila— es que los jóvenes de hoy día expresan su opinión sin temor y siempre quieren saber los por qué y los para qué de las cosas. Años atrás, estoy segura que existían las mismas dudas, las mismas ganas de preguntar, pero el sistema tradicional de enseñanza no lo permitía.

—Lo peor es que yo tampoco me lo preguntaba —reflexionó Daniel.

—Pero Daniel, si tú eres un producto de la educación tradicional, donde la memorización y el aprendizaje de reglas, eran leyes. O acaso alguien durante tu educación en la universidad te explicó el por qué de cada contenido matemático — escudriñó Camila

—Francamente jamás —afirmó categóricamente Daniel.

—Pues a mí tampoco me lo enseñaron, ni me inculcaron las ansias de investigar y si algo he hecho, ha sido por iniciativa propia —confesó Camila.

—Creo que ha llegado el momento de actualizarse —concluyó Daniel.

Esa mañana, Daniel llegó radiante. Tenía su esperada clase con el 4º medio y junto a Camila habían investigado y preparado todo muy bien. Sería, al menos eso esperaba él, una grata sorpresa para este curso. Habían elaborado una presentación en PowerPoint y se habían dividido el trabajo para exponerla entre los dos. Y llegó el momento.

"Estimados alumnos —comenzó Daniel—. Como ustedes ven, hay algunos cambios respecto a las tradicionales clases que habitualmente hacemos. Hoy nos acompaña la profesora Camila Bustamante, quien me ayudó con esta investigación que nació de la pregunta de su compañero Héctor, sobre la aplicación de los logaritmos en la vida cotidiana. Debo reconocer que mi conocimiento sobre aplicaciones logarítmicas era mínimo y aunque me sentí incómodo cuando me lo preguntaron, me alegra mucho que lo hicieran, porque gracias a ello he descubierto cosas maravillosas que me hacen amar cada vez más lo que hago y por supuesto mi asignatura. Comencemos".

Y las palabras se hicieron fáciles en la boca de Daniel. Una a una las diapositivas iban apoyando lo que decía.

—Cuando yo era estudiante…

—¡Uuuuuh! —bromeó inmediatamente el curso y todos se rieron.

—Bueno, —recomenzó Daniel—, cuando yo era estudiante, habitualmente teníamos que efectuar cálculos de expresiones bastante complejas tanto en matemática como en física y química. En ese tiempo, teníamos una gran salvadora, que no era la calculadora que ustedes manejan usualmente ahora, si no una tabla de logaritmos. A través de las propiedades, reducíamos todas las operaciones a otras más sencillas, en general a sumas y restas. Por ejemplo, la expresión $\sqrt[5]{\frac{2^{0,3}}{1,5}}$ la resolvíamos del siguiente modo: Hacíamos $x=\sqrt[5]{\frac{2^{0,3}}{1,5}}$ lo que equivale a $\log x=\log\sqrt[5]{\frac{2^{0,3}}{1,5}}$. Aplicando propiedades de los logaritmos se obtiene $\log x=\frac{1}{5}(0,3\log 2-\log 1,5)$. En nuestras tablas logarítmicas buscábamos los valores del log2 y log1,5 —Daniel mostró a todo el curso el ya estropeado libro con tablas logarítmicas—, obteniéndose para nuestro ejemplo, al resolver las multiplicaciones y divisiones, que log x =—0,01714. Finalmente buscábamos en nuestra tabla ese valor y así determinábamos que 0,9613 era el resultado de la expresión dada.

—O sea que la gran utilidad de los logaritmos es la posibilidad de simplificar los cálculos —afirmó Héctor desde su puesto.

—Correcto —confirmó Daniel—. Durante el siglo XVI, la realización de cálculos complicados se presentaba en asuntos mercantiles y trigonométricos, relacionados con la navegación o la agrimensura. Entonces, los técnicos y científicos, cuando tenían la necesidad de realizar numerosos y complejos cálculos, lo hacían utilizando las tablas de logaritmos.

—Eso significa que los logaritmos ya están obsoletos hoy, por los medios tecnológicos que tenemos —concluyó Sofía.

—Pues yo también pensaba lo mismo Sofía —reconoció Daniel—, pero, al investigar me llevé grandes sorpresas y esto es lo que les mostraremos con Camila.

—Primero, es conveniente que ustedes conozcan algunos antecedentes históricos sobre los logaritmos —indicó Daniel—.

La invención de los logaritmos se atribuye al escocés John Napier, quien los publicó por primera vez en 1614. Paralelamente a Napier, los descubría también el suizo Joost Bürgi, un matemático y relojero suizo, quien elaboró las primeras tablas logarítmicas, considerando la base 1,0001. Años después, por 1624, Henry Briggs, en colaboración con Napier, construyeron una tabla de logaritmos de base 10, las cuales tenían hasta 14 cifras decimales. En los últimos tiempos se emplearon tablas de cinco y cuatro dígitos porque los cálculos eran más rápidos y con esos decimales bastaba para la mayoría de los cálculos, como el texto de tablas logarítmicas que hoy traje.

—Ahora, dejaremos que la profesora Camila nos entregue más de los antecedentes encontrados respecto de los logaritmos.

—Como bien decía Daniel —introdujo Camila—, a veces los profesores nos preocupamos mucho de dominar los contenidos y los diversos ejercicios que se pueden realizar de cada tema, pero dejamos de lado lo que quizás más le interesa a ustedes; como los orígenes y la utilidad de la matemática. Hacia ese punto va, lo que ahora les voy a mostrar y comentar.

Camila comenzó su exposición con la proyección de unas diapositivas bastante particulares, que no parecían relacionarse con matemática. Éstas mostraban los efectos devastadores de algunos terremotos ocurridos en el mundo. Los alumnos y alumnas, a esa hora estaban muy atentos, sorprendidos y un poco confundidos con lo que veían. Y la pregunta no tardó en aparecer…

—Profe… —se escuchó la voz de Sofía—. Y esto, ¿qué tiene que ver con los logaritmos?

—Se los aclaro de inmediato —respondió Camila—. Para determinar la ubicación y la fuerza de un terremoto, los científicos utilizan un sismógrafo, que está equipado con sensores que detectan el movimiento del suelo causado por las ondas sísmicas. Estos movimientos sísmicos del suelo se miden en tres direcciones: de arriba abajo, de norte a sur y de este a oeste. Los sismógrafos producen líneas onduladas que reflejan el tamaño de las ondas sísmicas. El registro de estas ondas se puede imprimir, grabar, o guardar en un computador. La intensidad de un terremoto es medido con la Escala de Mercalli, mientras que la magnitud se mide con la Escala de Richter.

Los alumnos no se perdían detalle de la exposición y mientras Camila continuaba con su presentación, Daniel se daba cuenta que esa clase era lo que siempre había buscado para lograr el interés de sus alumnos por aprender la matemática.

—Sobre la Escala de Richter les quiero hablar.

Es una escala nombrada así en honor de Charles Richter, un sismólogo estadounidense que vivió entre el 1900 y 1985 y que está basada en… —Camila hizo una gran pausa— los logaritmos. Richter desarrolló su escala en la década de 1930, donde calculó que la magnitud de un terremoto puede ser medida mediante la fórmula

$$M = \log_{10} A + 3\log_{10}(8\Delta t) - 2{,}92$$

En esta fórmula, A es la amplitud en milímetros y t, el tiempo en segundos. Se asigna una magnitud arbitraria, pero constante a terremotos que liberan la misma cantidad de energía. En algunos textos también se utiliza la fórmula:

$$M = B + \log_{10}\left(\frac{a}{T}\right)$$

En esta otra, a es la amplitud del movimiento del suelo en micras, medida por la estación receptora, T es el periodo de la onda sísmica en segundos y B, un factor relacionado al debilitamiento de la onda con el incremento de la distancia al epicentro.

— El uso del logaritmo en la escala es para reflejar la gran cantidad de energía que se desprende en un terremoto. El logaritmo incorporado a la escala hace que los valores asignados a cada nivel aumenten de forma exponencial, es decir con un multiplicador, y no de forma lineal.

—¿Me permites, Camila? —interrumpió Daniel.

—Por supuesto, adelante —respondió la profesora.

—Quiero agregar una información que considero importante para los chilenos especialmente y es que la mayor liberación de energía que ha podido ser medida fue durante el llamado Gran Terremoto ocurrido en la ciudad de Valdivia, el 22 de mayo de 1960, el que alcanzó los 9,5 grados en la escala de Richter.

—¡Gracias Daniel! Excelente aporte —expresó Camila.

Y para que no tengan confusiones, en 1902 el sismólogo italiano Giusseppe Mercalli creó una escala de intensidad, que en 1932 fue modificada por Harry Wood y Frank Neumann, creando así la Escala de Intensidad Modificada de Mercalli, de la que seguramente han escuchado hablar. Esta escala no tiene una base matemática, sino que está compuesta por 12 niveles de intensidad ascendentes, basados en los efectos observados que van desde el movimiento apenas perceptible, hasta la destrucción catastrófica. Los grados de la escala de Mercalli se expresan en números romanos.

—Bien queridos alumnos —dijo Daniel— la clase ha llegado a su fin. Camila y yo, esperamos que hayan comprendido lo referente a la aplicación de los logaritmos y que, gracias a la consulta de su compañero Héctor, salió a la luz. Desde ya, les anunciamos que no es la única aplicación que tienen, hay muchas otras, que en algún momento conocerán. Estoy seguro que desde este instante ustedes verán los logaritmos y tal vez la matemática desde otro punto de vista.

Un gran aplauso llenó la sala de positivismo y de alegría. Los alumnos se abalanzaron sobre Camila y Daniel y los cubrieron de preguntas y de opiniones sobre lo expuesto.

Más tarde Daniel y Camila se reunieron a tomar un café juntos, en la sala de profesores e intercambiaron opiniones sobre lo expuesto en la clase y el recibimiento por parte de los alumnos. No podían ocultar su satisfacción y resolvieron que en el próximo Consejo de Profesores relatarían la experiencia a todos sus colegas.

FRACCIONES CONTINUAS

—Planifiquemos la clase de fracciones continuas —propuso Daniel

—Sí, ese tipo de ejercicios me gusta —expresó Camila—, porque aparte de la operatoria con fracciones que hay que ir resolviendo es fundamental el orden al anotar el proceso. Debemos insistir en que lo hagan paso a paso y en meticuloso orden.

—Estoy de acuerdo contigo. Siempre que debo pasar este contenido llevo plumones de diversos colores para explicar, marcando el paso que se está realizando —explicó Daniel.

—Es una buena idea —reconoció Camila—. Resolvamos alguno y nos ponemos de acuerdo en la explicación que vamos a dar.

—Bien — dijo Daniel y anotó:

$$1-\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{4}}}=$$

—Lo primero es insistir en que el signo más o menos va a la misma altura de la línea fraccionaria —señaló Camila—. Eso muchas veces se considera intrascendente, pero para el que está aprendiendo es fundamental.

—Tienes razón — apoyó Daniel — y también, ubicar correctamente el signo igual. Comencemos el desarrollo efectuando $1+\frac{3}{4}$ lo que nos da:

$$1-\frac{1}{1+\frac{2}{\frac{7}{4}}}=$$

—Aquí es donde les insisto a mis alumnos sobre la importancia del signo frente a la línea de fracción, ya que $1+\frac{2}{\frac{7}{4}}$ se puede prestar para confusiones —aclaró Camila.

—También yo hago lo mismo e incluso les pido que la línea principal, es decir, la que está bajo el 2, la hagan más larga que la otra o que la remarquen más. Sigamos:

$$1-\frac{1}{1+\frac{8}{7}}=1-\frac{1}{\frac{15}{7}}=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

—Bien, eso es todo. Es importante que este tipo de ejercicios, queden claros para su posterior aplicación algebraica —concluyó Camila.

—Un momento —dijo Daniel— esto aún no termina.

—¿A qué te refieres? —preguntó Camila intrigada.

—A que ahora haremos el proceso inverso —señaló sonriente Daniel.

—¿Cómo es eso, jamás lo he hecho?

—Fácil. Démosle una fracción cualquiera, por ejemplo $\frac{4}{11}$ y observa a lo que se puede llegar:

$$\frac{4}{11}=\frac{1}{\frac{11}{4}}=\frac{1}{2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{4}{3}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+1}}}$$

—¡Qué hermoso! —exclamó Camila— jamás lo había pensado ni trabajado de ese modo. Te felicito.

—No, al que tienes que felicitar es a Gauss —señaló Daniel—, que fue el primero en preocuparse del estudio de la parte fraccional en el desarrollo de un número en fracción continua.

—Un excelente aporte —reconoció Camila—. Con esto, más lo que contiene el texto, ya tenemos material para nuestra próxima clase.

—Y además les puedes agregar que, una pregunta de la PSU de matemática del año pasado, era de fracciones continuas. Hasta se la puedes dar.

—¿Y tú la tienes? —preguntó entusiasmada Camila.

—No sólo la tengo, me la aprendí de memoria, porque es muy simple.

Daniel cogió un papel y casi sin pensar, anotó.

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}$$

—¿Qué te parece?

—¡Excelente! Estoy segura que me van a decir que la PSU es fácil —señaló Camila.

—Te aseguro que con una buena preparación desde primero medio, eso es cierto —concluyó Daniel.

ASESINATOS Y FÓSILES

Dos días después y motivado por la exposición hecha en el 4º medio, Daniel decidió hacer la misma labor en el Plan Diferenciado de 4º, considerando que allí estaban los futuros hombres y mujeres de la matemática, en especial de la ingeniería. Con ellos, los contenidos se trabajan con mayor profundidad, pero adoleciendo de la misma falta de conocimientos históricos y de aplicación que el plan común.

Buenos días mis queridos matemáticos y matemáticas —saludó Daniel— con una amplia sonrisa que denotaba su buen ánimo.

"Buenos días profe" —contestaron a coro los alumnos—, pero no hay que negar que les llamaba la atención la espontánea alegría que mostraba su maestro.

—¿Seguimos con la guía? —preguntó Boris.

—Por el momento, vamos a dejar de lado el desarrollo de esa guía y vamos conversar sobre asesinatos.

—¿De qué señor? —preguntó Diana— Escuché mal o dijo asesinatos.

—Exactamente eso dije —confirmó Daniel.

El profesor no cabía de gozo al ver las caras de sorpresa de sus alumnos y de cómo se acomodaban en su asiento, preparándose para escuchar atentamente lo que relataría a continuación.

—¿Recuerdan que hace algunos días analizamos el número e? —y escribió en la pizarra una gran e— En el plan común dijimos que e, es el único número real cuyo logaritmo natural es 1 y en nuestro electivo conocimos a e como el límite de la sucesión de término general $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ y que su valor aproximado es 2,71828…, pero en ambas situaciones jamás hablé de su utilidad práctica, que son muchas, ni tampoco del entorno histórico en el que se determinó. Eso quiero hacer ahora.

—O sea profe, algo similar a lo que hizo en la clase de logaritmos —concluyó Boris.

—Exactamente —respondió Daniel.

Las más variadas expresiones se escucharon en la sala: "qué bueno", "que entretenido", "esto le hacía falta a nuestras clases", etcétera.

—El primer estudio sistemático del número e se divulga en 1748, con la publicación de "*Introductio in Analysin Infinitorum*" de Euler, en el cual por primera vez se muestra cómo una suma infinita que crece monótonamente se puede usar para definir un nuevo número real. —comenzó exponiendo Daniel.

—Señor, ¿la letra e es por Euler? —preguntó Diana.

—Obvio, si él lo creó —le respondió Diego.

—No tan obvio Diego —aclaró Daniel— Se cree que la letra e fue sugerida por Euler por ser la primera letra de la palabra exponencial. Y aprovecho de contarles que el uso de la letra griega pi, se debe también en gran medida a Euler, porque aunque esta había sido mencionada en una obra antes que Euler naciera, fue él con sus populares escritos quién extendió su uso en forma universal.

—Qué interesante, eso tampoco lo sabíamos —comentó Alex.

—Y para mayor conocimiento, les agrego que la letra i, que representa a la $\sqrt{-1}$, también la introdujo Euler, casi al final de su vida. Y que cuando dibujan un triángulo y designan sus lados por las letras minúsculas a, b y c; y sus vértices por A, B y C, también es por Euler.

—Soy un nuevo admirador de Euler —dijo Diana sonriendo.

—Cuando iniciamos la clase —recordó Daniel— lo hice con una palabra que es muy extraño que se utilice en una clase de matemática; asesinato. Pues ahora conoceremos cómo podemos aplicar el número e para determinar el momento de la muerte, ya sea en un asesinato o en un fallecimiento cualquiera.

—Primero, conozcamos algunas cuestiones previas.

“La velocidad a la que se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del entorno. Esto no es algo que haya inventado yo —dice Daniel, sonriendo—, sino que corresponde a una ley de Newton sobre el enfriamiento. Por lo tanto, cuando un objeto está mucho más caliente que el aire exterior, se enfría muy rápidamente; mientras que cuando un cuerpo está un poco más caliente que su entorno, su velocidad de enfriamiento es baja y se enfría lentamente.” ¿Se entiende lo que estoy explicando? —inquirió Daniel.

—Sí profe, algo de eso hemos visto en física —respondió Alex.

“Agreguemos que una persona viva no se enfría continuamente y que la temperatura del cuerpo es alrededor de los 36ºC, equivalente a 98,6ºF. Pero una persona muerta deja de producir calor y su enfriamiento sigue la ley de Newton que se aplica con la fórmula matemática siguiente:”

$$T = T_{aire} + \frac{T_{cuerpo} - T_{aire}}{e^{k \cdot t}}$$

En esta fórmula, T es la temperatura, t es el tiempo en horas después de medianoche y k es una constante.

—¿Qué les parece? —preguntó Daniel.

—Muy interesante —expresó Boris. ¿Nos puede dar un ejemplo?

—Por supuesto —respondió Daniel, ahora bien preparado en temas de aplicación. Eso es lo que viene a continuación, de acuerdo a mi planificación.

La policía — comenzó su ejemplo Daniel—, fue llamada por los vecinos de una población, informándole que se había encontrado un cadáver en la vía pública. Esa persona había sido asesinada de dos disparos y se sospechaba que en un ajuste de cuentas entre narcotraficantes. Al tomarse su temperatura resultó de 84º F y la temperatura del aire era de 67º F. Con estos datos, la policía logró determinar el momento de su muerte.

Daniel hizo pasar a la pizarra a Diana para que hiciese los cálculos pertinentes. Y así los hizo ella:

$$T = T_{aire} + \frac{T_{cuerpo} - T_{aire}}{e^{k \cdot t}}$$

$$98{,}6^{o} = 66^{o} + \frac{84^{o} - 67^{o}}{e^{0{,}5207t}}$$

$$32{,}6 = \frac{17^{o}}{e^{0{,}5207t}}$$

$$e^{0{,}5207t} = \frac{17^{o}}{32{,}6^{o}}$$

$$e^{0{,}5207\,t} = 0{,}5214$$

Aplicando logaritmos resulta, —continuó desarrollando Diana.

0,5207t ·Le = L(0,5214)

0,5207t =—0,6512

$$t = \frac{-0{,}6512}{0{,}5207}$$ =—1,25 horas =—75 minutos

—En conclusión —expresó Diana—, gracias a la ayuda del número e y los logaritmos la policía sabe que esta persona murió 75 minutos antes de las doce de la noche, es decir, a las 22:45 horas.

—¡Muy bien, Diana! ¿Qué les parece lo que hemos visto?

—¡Espectacular! —respondió Diego.

—Ahora, practiquen esta interesante aplicación de la matemática, desarrollando algunos ejercicios similares —ordenó Daniel.

—Señor, no sé si tiene que ver —dijo Emilio—, pero así como se calcula el tiempo que lleva muerta una persona, ¿se podría calcular la edad de los fósiles o de los huesos desenterrados en una excavación arqueológica?

—Sí, —afirmó Daniel—, pero no con el mismo método que se acaba de explicar. Ello se efectúa a través del procedimiento de datación por el Carbono-14.

—Señor, ¿y en ese procedimiento también está involucrada la matemática? —preguntó Boris.

—Nunca tanto —le dijo Diana.

—Parece increíble Diana, pero sí —confirmó Daniel— El proceso de datación por Carbono-14, está relacionado con las funciones exponenciales y los logaritmos neperianos o naturales.

—¿Nos podría explicar cómo se realiza? —consultó Alex.

El carbono-14 o radiocarbono, es un isótopo radioactivo del carbono —expuso Daniel. —Supongo que han visto esto en química —preguntó al curso casi afirmando que deberían poseer este aprendizaje previo. Todos asintieron con un movimiento de cabeza, aunque con algo de inseguridad.

Y su característica —continuó Daniel—, es que se produce regularmente en la atmósfera bajo la influencia de las radiaciones solares. Tiene un período de desintegración de 5.730 años.

—Profe, ¿qué quiere decir eso? —consultó Ignacio.

—Que a los 5.730 años de la muerte de un ser vivo, el carbono-14 se ha reducido a la mitad en los restos fósiles, a los 11.460 años, a la cuarta parte, a los 57.300 años es de tan solo el 0,01% del que tenía cuando estaba vivo y así sucesivamente hasta su total desaparición —respondió el profesor. Hizo una pausa para que todos interiorizaran la explicación y luego continuó explicando. —Sabiendo la diferencia entre la proporción de carbono-14 que debería contener un fósil si aún estuviese vivo, que es semejante a la de la atmósfera en el momento en que murió y la que realmente contiene, se puede conocer la fecha de su muerte de forma bastante exacta.

—¿Y cómo miden los científicos la cantidad de carbono-14 en un fósil? —volvió a preguntar Ignacio, muy concentrado en el tema, actitud que no era muy habitual en él.

—Incineran un fragmento pequeño —explicó Daniel— para convertirlo en gas de dióxido de carbono. Se utilizan contadores de radiación para detectar los electrones emitidos por el decaimiento de carbono-14 en nitrógeno. La cantidad de carbono-14 se compara con la de carbono—12, forma estable del carbono, para determinar la cantidad de radiocarbono que se ha desintegrado y así datar el fósil.

—¿Y dónde aparecen los logaritmos? —insistió en preguntar Ignacio.

—En la fórmula que permite calcular la antigüedad de una muestra —respondió Daniel y anotó en la pizarra:

$$t = \frac{Ln(\frac{N_f}{N_0})}{-0{,}693} \cdot t_{\frac{1}{2}}$$

—El símbolo Ln —señaló Daniel, explicando la fórmula— sabemos que corresponde al logaritmo neperiano, $\frac{N_f}{N_o}$ es el porcentaje de carbono-14 en la muestra en relación con la cantidad existente en el tejido vivo, donde N_f corresponde al carbono-14 final del fósil y N_0, el carbono-14 original del tejido vivo. El período de desintegración del carbono-14 se simboliza por $t_{\frac{1}{2}}$

—Desarrollemos un ejemplo para que nos quede más claro —propuso Daniel.

Tenemos un fósil con un 10% de carbono-14 en relación con una muestra viva. ¿Cuál sería su antigüedad?

—¿Quién quiere pasar a hacer los cálculos? —dijo Daniel, ofreciendo el plumón de pizarra.

—Yo señor —dijo Boris, poniéndose de pie, calculadora en mano y aceptando el desafío de su profesor.

—Es sólo reemplazar los valores —explicó y, con mucha seguridad, anotó en la pizarra:

$$t = \frac{\ln 0{,}10}{-0{,}693} \cdot 5730\, años$$

$$t = \frac{-2{,}303}{-0{,}693} . 5730\, años$$

$$t = 3{,}323 \cdot 5730\, años$$

$$t = 19.040\, años$$

—¡Muy bien! La respuesta es correcta y con este ejercicio, hemos terminado por hoy. Los felicito por el interés con que han participado. Ha sido una clase muy beneficiosa. Eso se los aseguro —finalizó Daniel.

PLACAS PATENTES

—¿Escucharon la semana pasada la información sobre las placas patentes de los automóviles? —preguntó Daniela a instantes de haber ingresado al aula de 2º medio.

—Yo lo escuché —dijo Pamela—, era sobre un cambio que le van a hacer a las patentes, agregándole una letra o un número, pero no lo tenían decidido todavía.

—¿Y por qué? —preguntó Romina

—Porque ya se les acabaron todas las combinaciones de patentes —respondió Pamela.

—En las noticias —dijo Álvaro— señalaban que van a empezar a traer autos de China y muy baratos, por lo que mucha gente podrá comprarse uno, así que la cantidad de autos va a aumentar considerablemente, por eso le van a faltar placas patentes.

—Pues la clase de hoy —señaló Daniel— trata sobre ese tipo de problemas y muchos otros que son de clara aplicación en la vida cotidiana. Me refiero a la Combinatoria.

—Suena interesante —señaló Esteban.

—Y lo es —respondió Daniel— Ya verán por qué. Esperó que todos se sentaran hasta que el silencio anunció la hora de empezar la clase.

Un grupo de 7 amigos —comenzó diciendo Daniel—, va a un restaurante a cenar. Una vez que están ubicados en una mesa, llega el garzón y antes de ofrecerles el menú, les dice que anoten en un papel el orden en el que están y que el próximo mes vayan nuevamente a cenar y que se sienten a la mesa, pero en otro orden y que vayan el tercer mes y que se sienten en un orden distinto a los meses anteriores y así sucesivamente. El garzón les dijo que una vez que cada uno se haya sentado en todos los puestos posibles, podrán pedir todas las exquisiteces que quieran, porque las cenas de ahí en adelante, serán totalmente gratis. Los comensales aceptaron y se fueron felices pensando en que muy pronto podrían comer sin pagar un peso.

Daniel tomó un respiro y ante la expectativa de todos lanzó la pregunta:

—¿Cuánto tiempo transcurrirá para que los 7 amigos puedan empezar a comer gratis?

Los alumnos, comenzaron a calcular mientras Daniel respondía individualmente las consultas sobre los diversos procedimientos que estaban realizando.

—Señor, creo que van a tener que ir en silla de ruedas a la cena —dijo Maribel sonriendo—, me salió como en 60 años más. Claro que ocupé una hoja completa con sumas y multiplicaciones, espero no haberme equivocado.

—Dejen hasta allí sus procedimientos —señaló Daniel— es suficiente con todos los esfuerzos que han hecho para tratar de resolver el problema. Este problema se resuelve, siguiendo un método de cálculo, igual que el de las patentes que se comentaba al inicio de clases. Y estos "métodos que simplifican los cálculos" son los que vamos a estudiar ahora.

—De Punta Arenas a Puerto Montt —dijo Daniel— hay 3 empresas aéreas y 5 de transporte terrestre. Si quiero enviar una encomienda por vía aérea o terrestre, ¿cuántas posibilidades tengo para enviarla?

—Eso es fácil —dijo Romina— son 3 + 5, o sea 8.

—Correcto —le confirmó Daniel— y esto se llama "Principio de Adición", el cual afirma que si dos operaciones son mutuamente excluyentes, es decir, si sólo una de ellas puede ocurrir y, si la primera se puede hacer de m maneras diferentes y, la segunda operación se puede hacer de n maneras diferentes, entonces hay m+n maneras de realizar la primera o la segunda operación.

—Consideremos la siguiente situación —prosiguió Daniel—: De Valdivia a Temuco hay 2 carreteras por las que se puede viajar y de Temuco a Santiago 5 carreteras. ¿Cuántos caminos puedo tomar si quiero ir de Valdivia a Santiago?

—7, señor —respondió Mario.

—Piensa un poco más tu respuesta Mario —aconsejó Daniel—, no es la misma situación anterior.

—Ya lo tengo señor —dijo Sofía— Hice un dibujo, como usted siempre nos recomienda, y fui tirando líneas de V a T y luego de T a S. Me resultaron en total 10 caminos.

—Perfecto —dijo Daniel. ¿Mario, entendiste lo que explicó tu compañera?

—Sí señor, también me hice un dibujo.

—Anoten entonces —señaló Daniel— Si un hecho se puede realizar de m maneras diferentes y si en cada caso, un segundo hecho se puede realizar de n maneras diferentes, entonces hay

maneras de realizar ambos.

—Volvamos a nuestra noticia —dijo Daniel. Supongamos que Chile decide hacer patentes que contengan 2 letras y 2 números, ¿cuántas placas patentes podrían hacerse?

—¿Cuántas letras debemos considerar? —preguntó Esteban

—26 letras —le respondió Daniel.

—¿Se pueden repetir las letras y los dígitos? —consultó Lorena.

—Sí —respondió Daniel— y consideren que una placa patente puede tener un número que sea 05, por ejemplo.

—Listo señor, salen 67.600 placas patentes —concluyó Pamela—, pero son muy pocas para un país.

—Exactamente —dijo Daniel— Por eso el año 1985 se dicta una Ley del Tránsito, la que dispuso la creación de un Registro Nacional de Vehículos Motorizados, donde se determina que las patentes constarían de 2 letras y 4 números. Calculemos entonces, cuántas placas patentes se pueden elaborar con ese formato.

—Como hay que multiplicar $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ —dijo Raquel— basta con agregar 2 ceros al resultado del ejercicio anterior.

—O sea 6.760.000 placas patentes —agregó Esteban.

—Según lo que anunciado en las noticias, se evalúan varias alternativas —informó Daniel— Una de tres letras y cuatro números, otra con cuatro letras y dos números y otras más. Calculemos la cantidad de placas patentes que consideran 3 letras y 4 números, que al parecer tiene la mayor opción de establecerse.

—Ahí sí que aumenta la cantidad de placas patentes —comentó Romina— me dio en total 175.760.000.

—Por eso se quiere elegir ese formato —agregó Daniel—, porque sus combinaciones durarán, por lo menos, unos 20 años y es más fácil recordarlas.

—Señor, si yo fuera la encargada no elegiría la opción de 3 letras y 4 números, optaría por la de 4 letras y 2 números —señaló Sofía.

—¿Podrías explicar tu punto de vista? —preguntó Daniel

—Al multiplicar $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10$ resultan 45.679.600. Eso sí, —acotó Sofía— eliminaría las vocales para evitar en alguna patentes palabras inadecuadas.

—Excelente tu análisis, Sofía —felicitó Daniel.

—Señor, ¿usted sabe cuántos autos piden su placa patente al año? —preguntó Esteban.

—Por ahí leí que anualmente se inscriben unos 150.000 nuevos vehículos.

—Como el número de letras va a variar —dijo Romina—, ¿irán a cambiar el tamaño de la patente?

—Por lo que escuché, creo que no. Se mantendrá el tamaño de la placa, que para su información es de 37,5 centímetros de ancho por 13 centímetros de alto.

—¿Y cómo sabe eso, señor? —preguntó sorprendido Álvaro.

—Pues midiéndolo —respondió sonriente Daniel— o ¿nunca les había entrado la curiosidad por saberlo?

—Francamente no, señor —respondió Álvaro.

—Antes de continuar —dijo Daniel— les voy a explicar un concepto que utilizaremos mucho en los contenidos que vienen a continuación, se trata del concepto de factorial. Este se define de la siguiente manera, consideremos un entero $n \geq 0$, entonces n factorial, expresado $n!$, se define por:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por ejemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Resuelvan ustedes 5! —les pidió Daniel—. Bien, ahora vamos al siguiente tema —anunció Daniel.

Inició el tema, motivando con una pregunta.

"¿Cuántas palabras distintas, con o sin significado, se pueden formar con las letras de la palabra ROMA?"

Los alumnos comenzaron a escribirlas, mientras Daniel recorría la sala viendo las palabras que formaban. Roma, Amor, Mora, Roam, etc.

—¿Cuántas formaron? —preguntó en general Daniel.

—24 señor —respondió Lorena.

—¿Y se puede determinar de otra manera para no tener que estar escribiendo una por una? —preguntó Sofía.

—Por supuesto que sí —dijo Daniel— Por eso les definí el concepto de factorial, porque lo que acabamos de hacer se llama una permutación y el cálculo de todas las permutaciones posibles de un conjunto de n elementos, está dada por la expresión…

Y en silencio recorría e interrogaba con su mirada al curso.

—n factorial —respondió Sofía.

—¡Excelente! n factorial. Por consiguiente, ¿cuántas palabras se pueden formar con la palabra RATON?

—5 factorial —respondió Lorena y agregó pensativa— ¿Pero… qué pasa si hay letras repetidas?

—Analicemos —respondió Daniel— ¿Cuántos números de dos cifras se pueden formar con los dígitos 1 y 2?

—El 11, 12, 21 y 22 —contestó Pamela.

—Es decir, no es 2 factorial —concluyó Maribel.

—Veamos otra situación. ¿Cuántas palabras, con o sin significado se pueden formar con la palabra MAS?

—Me salieron 27, señor —respondió Raquel.

—¿A alguien se le ocurre una conclusión? —preguntó Daniel.

—Cuando usamos 2 cifras el resultado fue 4 y cuando utilizamos 3 letras, dio 27 —respondió Sofía— Eso me recordó de inmediato las potencias 2^2 y 3^3.

—En conclusión, las permutaciones con repetición de n elementos tomados de n en n, se determinan por la expresión $PR_{n,n} = n^n$.

—Señor —dijo Lorena—, creo que tomó mi pregunta por otro camino. Yo preguntaba qué pasa si queremos determinar cuántas palabras se forman con AMAR, por ejemplo, donde tenemos un par de letras iguales.

—Hagámoslo y veamos qué ocurre —respondió Daniel.

Todos comenzaron a escribir las distintas palabras formadas con la palabra AMAR.

—Salieron 12 —dijo Mario.

—¿Y si lo hiciésemos con la palabra ALA? —preguntó Daniel.

Nuevamente se concentraron en determinar la cantidad de palabras.

—Salen sólo 3 —respondió Esteban.

—Así es —señaló Daniel—, porque el número total de permutaciones que podemos formar está dada por la relación $P = \dfrac{n!}{a! \cdot b! \cdot \ldots \cdot r!}$ donde a , b, …, r; son las veces que está repetido un elemento. Ejercitemos determinando el número de palabras que podemos formar con la palabra PARALELEPIPEDO.

—Hay 3 letras P —dijo Raquel en la pizarra— 2 letras A, 2 letras L, 3 letras E, por lo que al reemplazar resulta $P = \dfrac{14!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!}$, pero es muy grande para calcularlo.

—Está bien Raquel, sólo dejemos la expresada la solución.

Eso es todo por hoy —finalizó Daniel— La próxima clase continuaremos estudiando otros problemas de combinatoria.

VERIFICANDO MI DÍGITO

—Profe, quiero hacerle una pregunta —dijo Ángel— ¿Cómo se hace para determinar el dígito verificador de la Cédula de Identidad?

—¿Y a qué se debe tu curiosidad? —preguntó Daniel.

—Es que anoche mi papá me preguntó si yo lo sabía calcular —explicó Ángel— para ocuparlo en un programa de computación que está haciendo. Yo le contesté que no sabía, que eso no se pasaba en el colegio y él me respondió: "eso es lo que deberían pasar".

—Creo que tu papá tiene razón —asintió Daniel— y es lo que hemos iniciado este año; la aplicación de la matemática a situaciones de la vida cotidiana. Y para que se lo expliques a tu papá, hoy voy a enseñarles de qué modo se calcula.

—Ustedes saben —comenzó Daniel explicando— que el dígito verificador de una Cédula de Identidad puede ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y k. Para obtenerlo se debe seguir el siguiente algoritmo: En primer lugar, hay que multiplicar todos los dígitos de la Cédula de Identidad, desde el último, al primero por los números 2, 3, 4, 5, 6 y 7, en ese orden. Una vez llegado a 7, se reinicia nuevamente la serie desde 2 hasta el número que complete nuevamente los dígitos de la Cédula.

—¿Puede dar un ejemplo, señor? —preguntó Ester.

—Por supuesto, eso haré ahora y no sólo eso, ustedes van a calcular el dígito verificador de su propia Cédula de Identidad.

Todos comenzaron a buscar su carné.

—Con calma —dijo Daniel—, primero realicemos el ejemplo, después vamos al de ustedes.

Mi Cédula de Identidad es 7.201.989. Determinemos el dígito verificador. Para eso multipliquemos como les explicaba anteriormente, es decir:

9 · 2 = 18

8 · 3 = 24

9 · 4 = 36

1 · 5 = 5

0 · 6 = 0

2 · 7 = 14

—Como ya llegamos a multiplicar por 7, debemos reiniciar la serie con el número 2:

7 · 2 = 14

—Con eso, terminamos de calcular todos los productos y ahora hay que sumarlos, entonces 14+14+0+5+36+24+18, lo que nos da 111. La tercera etapa es dividir la suma por 11.

—¿Siempre por 11? —preguntó Ricardo.

—Sí, así es —respondió Daniel—, al dividir nos queda un resto, que es 1. En definitiva, para determinar el dígito verificador, se debe encontrar la diferencia entre 11 y el resto de la división, en nuestro caso, 11 — 1 = 10; cuando la resta es 10, como en este caso, el dígito verificador es la letra k.

Daniel pasó su Cédula de Identidad, la que corrió por todo el curso para que comprobaran el resultado obtenido. Las bromas no se hicieron esperar, ya que la foto era antigua.

—Comprobemos otra Cédula de Identidad, ¿quién presta la suya? —preguntó Daniel.

—Yo —dijo Estefanía, pasándosela al profesor.

—El número sin dígito verificador —dijo Daniel, anotando en la pizarra—, es 18.354.726; calculen su dígito verificador.

Realizaron el procedimiento aprendido y María Paz, que había terminado antes que todos, se ofreció a desarrollarlo en la pizarra. Lo hizo dialogando con el curso, imitando la forma del profesor.

—Multiplicamos de acuerdo a la serie correspondiente y resulta

6 · 2 = 12

2 · 3 = 6

$7 \cdot 4 = 28$

$4 \cdot 5 = 20$

$5 \cdot 6 = 30$

$3 \cdot 7 = 21$

$8 \cdot 2 = 16$

$1 \cdot 3 = 3$

—Ahora, se suman los productos —prosiguió María Paz— y resulta 136. Se divide por 11 y da 12 de "cuociente" y 4 de resto. Se resta el divisor 11 con el resto 4 y se determina que el dígito verificador es 7.

—Correcto María Paz, excepto por un pequeño detalle; según la Real Academia Española de la Lengua, se dice cociente y no "cuociente" —rectificó Daniel—. La palabra "cuociente" es una expresión anticuada.

—Señor —preguntó Ricardo—, en sus tiempos… ¿cómo se enseñaba?

—Bueno, ¡continuemos con la clase! —exclamó Daniel- tras la bromista alusión a su edad, provocando la risa de sus alumnos.

—Señor, ¿en qué situación el dígito verificador es 0? —consultó Nicol.

—Cuando el resto de la división es 0, o dicho de otro modo, cuando la diferencia entre el divisor y el resto es 11 —respondió Daniel.

—¿Hay otra forma de determinar el dígito verificador? —preguntó Andrés.

—Sí —contestó Daniel—, pero por ahora basta con el que estudiamos. Aprovecho el tema para decir que las patentes que se asignan a los automóviles en nuestro país, también se trabajan con el mismo procedimiento.

—La única diferencia —siguió Daniel— es que al determinar la resta entre el divisor y el resto, el valor obtenido corresponde a una dupla de letras que deben buscarse en una tabla que posee el servicio de Registro Civil e Identificación.

¿VARIACIONES O COMBINACIONES?

—Resuelvan la siguiente situación: En una carrera de 400 metros participan 3 atletas. ¿De cuántas formas distintas pueden ocupar los tres primeros lugares? ¿Y de cuántas si son 4 atletas?

Los alumnos del Segundo Medio A, se concentraron en el problema planteado y en algunos minutos ya lo tenían resuelto.

—En el primer caso, salen 6 posibilidades distintas de ocupar los tres primeros lugares —contestó Lorena—, mientras que en el segundo son 24 formas.

—Muy bien y ¿cuántas formas habrán si son 5 atletas? —consultó Daniel.

Por un instante todos los rostros se veían algo pensativos, después… la mayoría comenzó a calcular o a buscar las posibilidades, anotando una por una.

—Son 60, señor —contestó Raquel—, pero salió súper largo porque lo hice uno por uno.

—Ya hemos hecho el cálculo para 3, 4 y 5 atletas. Ahora quiero que lo calculen para 6, pero utilizando alguna fórmula que ustedes puedan crear para este tipo de situaciones.

Después de varios minutos, comenzaron a aparecer las primeras conclusiones.

—Profe, —dijo Maribel— creo que tengo la respuesta, pero necesito saber cómo se llama este tipo de ejercicios.

—Variaciones o Arreglos —respondió Daniel.

—Gracias —dijo Maribel y anotó algo en su cuaderno—, como si la respuesta del profesor fuera lo que le faltaba para concluir el ejercicio.

—¿Cuántas formas de ocupar los tres primeros lugares te dio? —preguntó Daniel a Maribel, para verificar la respuesta de la alumna.

—120 formas y con una fórmula que inventamos entre Pamela y yo —respondió feliz y orgullosa.

—Pasa adelante y explícanos cómo determinaron la fórmula.

—Primero —comenzó explicando Maribel—, nos fijamos que en el primer caso daba 6 y pensamos en 3! que es $3 \cdot 2 \cdot 1$; vimos que el siguiente daba 24, que equivale a 4! o sea $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Ahí ya pensábamos que teníamos la respuesta, pero al comprobar el siguiente con 5! nos dio 120 y no 60 como realmente es. Eso significaba que o se restó algo o se dividió por algo. Después de probar diversas situaciones nos dimos cuenta que se tenía que ir dividiendo por otro factorial y allí concluimos la fórmula siguiente $V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ la señalamos por V por ser variaciones, donde n es el total de elementos y k el grupo de elementos que se consideran.

—Muy bien, esa es la fórmula correcta. Anótenla en su cuaderno —ordenó a la clase Daniel—. Felicito a todos por el trabajo realizado.

—Ahora resolvamos lo siguiente: ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con los dígitos 5 y 7?

—Salieron 8, o sea 2^3 —señaló Sofía.

—Perfecto. Y ahora, ¿cuántos números de 4 dígitos se pueden formar con el 2 y el 3?

—16, señor —contestó Esteban.

—¿Cuál es la conclusión con respecto a estas variaciones? —preguntó Daniel.

—Estas serían variaciones con repetición —explicó Sofía— y para estos casos ya no se usa la fórmula anterior, habría que utilizar $VR_{n,k} = n^k$

—Me alegra mucho que estén estableciendo las fórmulas generales por sus propios medios —les dijo Daniel—. Ahora les voy a plantear una nueva situación problemática y trataremos de llegar a determinar su fórmula general.

Buscó sus apuntes y escribió el problema en la pizarra, mientras iba leyendo.

—¿Cuántos grupos de 3 alumnos se pueden formar con 5 alumnos? Resuelvan.

Comenzaron a solucionar lo planteado y al poco tiempo ya lo habían hecho todos.

—Se pueden formar 10 grupos, señor —respondió Álvaro.

—De acuerdo —aprobó Daniel—, ¿y si fuesen grupos de 4 con 5 alumnos? ¿Y grupos de 2 con 5 alumnos? Analicen y luego determinen la fórmula general.

—Ya obtuvimos los resultados, pero no logramos determinar una fórmula —dijo Raquel.

—Es que no siempre es fácil determinar una fórmula con tan pocos ejemplos. Para llegar a ésta, tendríamos que desarrollar muchos más. En esta parte les voy a ayudar ya que el tiempo también es un problema. Podemos determinar las combinaciones considerando la fórmula: $C_{n,k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

—No era tan difícil —dijo Mario.

—Señor, no entiendo la diferencia entre variación y combinación —expresó Lorena.

—Te explico. Cuando trabajamos con permutación se debían combinar todos los elementos dados, o sea, con el 1, 2 y 3 formábamos los números 123, 132, 231, 213, 312, 321. En los casos que vimos hoy, se considera una parte de los elementos dados, es decir, nos dan 4 elementos y hay que juntarlos en grupos de 2, de 3, pero no de 4, porque entonces pasaría a ser una permutación. ¿Está todo claro hasta aquí?

—Sí, señor —respondieron.

—Ahora, existe una diferencia esencial entre Variación y Combinación. En las variaciones, los grupos abc, bca, cab, son distintos; en las Combinaciones, los grupos abc, cba, bac, son el mismo grupo. Es decir, en las Variaciones, un orden distinto de los elementos hace que el grupo sea distinto; en las Combinaciones, no importa el orden de los elementos.

—¿En qué situación de la vida real se da este caso? —preguntó Romina.

—En muchas donde los grupos están conformados por personas. Supongamos que elegimos 2 alumnos de este curso para ir a la Dirección a solicitar permiso para una actividad; podemos elegir varias parejas: Mario-Sofía, Raquel-Mario, Esteban-Romina, etcétera. Pero no tendría sentido que tuviéramos que elegir entre Mario-Sofía y Sofía-Mario, porque estaríamos eligiendo la misma pareja; en este caso, estamos hablando de una Combinación. Por lo tanto, entonces —reiteró Daniel—, en las combinaciones, si ya consideré los elementos a y b para formar el grupo ab, ya no puedo volver a formar otro grupo con los elemento a y b.

—Para finalizar —dijo Daniel—, en el poco tiempo que nos queda, voy a definirles las llamadas Combinaciones con Repetición de n elementos tomados de k en k, a los distintos grupos formados por k elementos de manera que los elementos que forman cada grupo pueden estar repetidos y dos agrupaciones distintas se diferencian al menos en un elemento, sin tener en cuenta el orden.

$$CR_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Por ejemplo, las combinaciones con repetición de los elementos a, b, c y d tomados de dos en dos son: aa ab ac ad bb bc bd cc cd dd. Aplicando la fórmula obtenemos

$$CR_{4,2} = \frac{(4+2-1)!}{2!(4-1)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10$$

que comprueba la cantidad de elementos que habíamos encontrado.

—Les dejo planteado el siguiente problema: ¿Cuántos equipos de básquetbol formados por 2 defensas, 2 delanteros y un centro puede conformar un director técnico si dispone de 6 defensas, 5 delanteros y 4 centros?

—Señor, ¿eso es una permutación, una variación o una combinación? —preguntó Mario.

Ustedes analicen y concluyan a cuál se refiere. Esta es la parte más importante de estos ejercicios, determinar qué tipo de procedimiento se debe aplicar al problema, por lo tanto piénsenlo individualmente y la próxima clase lo discutimos. Y recuerden lo que dijo la brillante matemática Hipatía: "Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar en forma errónea es mejor que no pensar".

EL MAYOR, POR AHORA

—Señor —dijo Ángel, llamando la atención del profesor—. Escuchó lo de los números primos.

—No —respondió Daniel— ¿de qué se trata?

—No lo tengo muy claro, pero en las noticias dijeron que habían descubierto el número primo más grande hasta hoy.

—Eso es muy interesante —expresó Daniel— ustedes saben que no es frecuente que los medios de comunicación se ocupen de la matemática.

—Excepto para los resultados del Simce y de la PSU —señaló Ester.

—En eso tienes toda la razón —confirmó Daniel— voy a buscar la información que me comentan y ustedes también hagan lo mismo. La próxima clase conversamos sobre ello.

La siguiente clase y apenas ingresó a la sala, los alumnos le preguntaron si conversarían sobre el número primo recientemente encontrado.

—Por supuesto —respondió Daniel— ese fue el compromiso.

—Señor —llamó Estefanía— Encontré todo lo relacionado con esa noticia, ¿puedo presentarla al curso?

—Adelante Estefanía, cuéntanos de esa importante novedad matemática.

Lo primero —comenzó Estefanía— es aclarar qué son los números primos, para que podamos conversar, manejando el mismo concepto.

—Eso me parece muy bien —aprobó Daniel.

Los números primos son aquellos que sólo pueden ser divididos por sí mismos y por el número 1, tales como el 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. Por ejemplo el 12 no es primo porque, aunque es divisible por sí mismo y por 1, también lo es por 2, por 3, por 4 y por 6.

—¿Cómo se llaman los que no son primos? —preguntó Elena— no me recuerdo.

—Compuestos —respondieron varios.

—Los números primos —continuó Estefanía— son muy apetecidos por los matemáticos y los siguen buscando debido a que no hay una fórmula que permita determinarlos. Además hay una institución que va a pagar cien millones de dólares a quien logre descubrir un número primo formado por diez millones de cifras.

—El mayor número primo conocido hasta hoy —siguió Estefanía, ya totalmente relajada en su exposición— está compuesto por 9.152.052 cifras por lo que sus descubridores estuvieron muy cerca de ganarse el millonario premio. Ellos son científicos norteamericanos, los doctores Curtis Cooper y Steven Boone, de la Universidad Estatal Central de Missouri. y pertenecen a un grupo virtual mundial, conocido como GIMPS, *Great Internet Mersenne Prime Search*, que significa Gran Búsqueda de Primos Mersenne por Internet.

El número primo encontrado es $2^{30.402.457} - 1$

En la noticia se expresaba que será identificado como "el número 43 de Mersenne". Cómo no sabía a qué se refería esto, busqué en Internet y allí me enteré que existe una fórmula inventada en el siglo XVI, por el monje francés Marin Mersenne, cuyo apellido hoy da nombre a estos números. Por ejemplo, el siete es un número Mersenne, ya que se obtiene efectuando $2^3 - 1$.

Actualmente, los números primos se usan en la creación de sistemas de seguridad para computadoras: cuantos más altos son, más seguridad ofrecen.

—¿Se podrá encontrar otro número primo usando el computador de la casa? —preguntó Ángel.

—¿Quieres hacerte millonario? —le dijo sonriendo Ester.

—Lo siento, Ángel —respondió Estefanía—, pero eso no será posible. Por lo que averigüé, necesitarías cientos de años para poder calcularlo.

Listo profe, eso sería todo.

—Démosle un gran aplauso a Estefanía por su excelente trabajo —sugirió Daniel y todos aplaudieron a la compañera con entusiasmo.

—Quiero agregar información con respecto a lo último que mencionó Estefanía sobre los números de Mersenne —dijo Daniel—. En primer lugar, que los ocho primeros son 3, 7, 31, 127, 8.191, 131.071, 524.287 y 2.147.483.647. Además que el número anterior al recientemente descubierto, es el primo $2^{25.964.951}-1$ y lo encontró el matemático Martin Nowak en febrero de 2005.

—Señor —preguntó Elena— ¿y cómo saben si hay más números primos?

—Excelente pregunta Elena —respondió contento Daniel— ya que es una interrogante que muchos se han hecho en la historia de la matemática. Te cuento que en Agosto de 2005, la revista "*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*", de la Universidad de Leicester, Inglaterra, publicó la demostración que asegura que existen infinitos números primos de Mersenne. Esta fue propuesta por el matemático venezolano, Dr. Alberto Durán Meza, profesor de la cátedra de matemática en la Universidad José María Vargas de Caracas.

—¿Existe otra fórmula aparte de la de Mersenne para número primos? —preguntó Ricardo.

—Hay otra, es de Pierre de Fermat, pero sólo se conocen 5 primos que la cumplen. Es esta —y escribió en la pizarra $2^{2^n}+1$— y los números que la cumplen son el 3, para n=0; el 5 para n=1; el 17 para n=2; el 257 para n=3 y el 65.537 para n=4.

—También —prosiguió Daniel— está la fórmula n^2-n+41 que alguna vez se pensó, que con ella se podían obtener todos los primos, pero no fue así y con respecto a esta quiero darles una actividad de tarea. Encontrar algún valor para n, para el cual la fórmula no sea cierta. La próxima clase me cuentan sobre sus resultados.

—Para finalizar quiero pedirle un favor a Estefanía —dijo Daniel mirándola—. Me gustaría mucho, que la disertación que hoy hiciste, la repitieras como parte del próximo "Viernes Cultural", ¿Te parece?

—¿En serio, profe? —preguntó sorprendida y entusiasmada Estefanía.

—Por supuesto, lo hiciste muy bien, manejas toda la información y es una noticia que todos deben conocer. ¿De acuerdo?

—Claro que sí señor, no hay problema —respondió Estefanía, feliz con la propuesta.

—Señor, ¿le puedo hacer una pregunta aunque no tiene nada que ver con el tema? —dijo Ricardo.

—Dime —respondió Daniel.

—¿Es verdad que las manchas y rayas de algunos animales tienen relación con la matemática?

—Sobre eso podría decirte que el matemático Alan Mathison Turing creó un modelo matemático que explica por qué una piel puede tener manchas y otra, rayas. También modeló sobre la concha de los caracoles las cuales se pigmentan de maneras muy bellas. Más información no tengo, pero sí puedo agregar que las ecuaciones matemáticas de Turing y otras aproximaciones, han servido para entender muchos de estos procesos, denominados de morfogénesis. En todo caso no estaría mal que investigaras sobre esto y luego nos lo presentaras en clase.

—Eso voy a hacer —afirmó Ricardo con decisión—. Gracias profe.

—Eso es todo por hoy —dijo Daniel, despidiéndose del curso. Se retiró de la clase muy contento, sentía que estaba yendo por el camino correcto.

BELLA Y BRILLANTE

Estaban en la mitad de su quehacer matemático aquella mañana los 11 alumnos que conforman el grupo de Matemática de la Formación Diferenciada del tercer año medio, cuando un comentario de Daniel llevó a que las siguientes clases tuviesen una introducción distinta a las habituales.

—¡Los desafío a que resuelvan el siguiente ejercicio! —planteó Daniel— y escribió en la pizarra:

“Sean a, b y c números reales no nulos y $a \neq b$. Probar que si las ecuaciones $x^2 + ax + bc = 0$ y $x^2 + bx + ca = 0$ tienen una raíz común, entonces las restantes raíces verifican la ecuación $x^2 + cx + ab = 0$”.

Todos anotaron el ejercicio y se concentraron en su resolución. Un rato después, Mónica se puso de pie y llevó su ejercicio resuelto a Daniel para que lo verificara.

—Listo muchachos, —el ejercicio ha sido resuelto— anunció al curso Daniel. Tenemos una nueva Hipatía.

—¿Hipa… qué? —preguntaron extrañados los alumnos.

—Hipatía —reiteró Daniel—, la primera mujer matemática.

—¿Y por qué es reconocida ella en el mundo de las matemáticas? —interroga Ramón.

—Ya les cuento, pero primero veamos la solución al problema planteado. Adelante Hipatía… perdón, Mónica, —dijo Daniel, sonriendo con satisfacción.

—Lo primero —comenzó explicando Mónica— fue considerar x_1, x_2 como las raíces de la ecuación $x^2 + ax + bc = 0$ y x_1, x_3 las raíces de $x^2 + bx + ca = 0$

La solución común x_1 verifica la ecuación:

$$x^2 + ax + bc - \left(x^2 + bx + ca\right) = 0$$

de donde resulta $(a-b)x_1 = (a-b)c$ y $x_1 = c$

Se sigue que $x_2 = b$ y $x_3 = a$, con lo que x_2 y x_3 son las raíces de la ecuación

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

Pues $x_1 = c$ es raíz de $x^2 + ax + bc = 0$, tenemos $c^2 + ac + bc = 0$, de donde $a + b + c = 0$ y $c = -a - b$.

Sustituimos este valor de $-a-b$ en $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ y listo.

—Perfecto Mónica —dijo Daniel sintiéndose orgulloso de su trabajo.

—¿Y ahora profe, nos va a contar sobre Hipatía? —preguntó Mónica, curiosa por saber qué había hecho esta matemática que la había hecho pasar a la historia.

—El matemático Teón de Alejandría —comenzó Daniel— debe su fama principalmente al haber editado y comentado el libro “Los Elementos” de Euclides, pero más, por su hija Hipatía, considerada la primera mujer matemática de la historia. Nació el año 370 en Alejandría, Egipto.

—Su fama proviene —continuó Daniel— principalmente por haber reemplazado a su padre en su cátedra en la escuela de Alejandría y también por haber hecho importantes comentarios sobre la obra de Arquímedes situación casi imposible para una mujer de la época.

Esto que acabo de decir, era sumamente inusual en un sistema en el que las mujeres no tenían derecho a la educación y sus vidas transcurrían en los espacios privados de sus casas, sus familias, sus amigas y de "las tareas femeninas".

La belleza, inteligencia y talento de esta gran mujer, fueron legendarias. Llevaba un ordenado tren de vida ya que cada mañana dedicaba varias horas al ejercicio físico, después tomaba baños que la relajaban y le permitían concentrar la mente para dedicarse, el resto del día, al estudio de las ciencias, la música y la filosofía.

Daniel tomó un respiro y continuó su relato ante el atento oído de todos.

—Hipatía, no sólo sabía de matemática, también Astronomía, Lógica, Filosofía y Mecánica. en el Museo, institución dedicada a la investigación y la enseñanza fundada por Tolomeo, del cual formó parte hasta su muerte, incluso, alrededor del año 400, fue ella quien lo dirigió. Su cátedra correspondía a la de Filosofía platónica y por esto la llamaban "la filósofa".

Escribió un trabajo titulado "El Canon Astronómico", y comentó las grandes obras de la matemática griega como la "Aritmética" de Diofanto, "Las Cónicas" de Apolonio y el libro III del "Almagesto" de Tolomeo.

—Pero la vida de Hipatía de Alejandría —dijo Daniel con voz baja y un aire de misterio— no fue fácil ya que ella no era cristiana su tradición era la del helenismo pagano. El obispo Cirilo de Alejandría trató en varias oportunidades de convencerla para que profesara la fe cristiana, pero ella la rechazó. Hipatía comenzó a tener influencia en los medios científicos, literarios y políticos y esto no le agradó a mucha gente que empezó a ver en ella a una mujer con cualidades de hechicera.

—Por si acaso, te dije Hipatía por tus cualidades matemáticas Mónica, no por bruja —dijo Daniel, provocando la risotada de todos.

—Prontamente —prosiguió Daniel— la acusaron de influenciar al gobernador de la ciudad, Orestes, para que este actuara en contra de la cristiandad. Fue tanto el convencimiento de que ella usaba la hechicería para tener dones matemáticos y de convencimiento de los otros que el año 415, una muchedumbre incitada por un grupo de monjes, detuvo su carruaje en el que viajaba, la hicieron descender, la golpearon y tasajearon la piel y las carnes con caracoles afilados, hasta que murió. Y esa es la historia de esta gran matemática.

—Me dio pena lo que le pasó a Hipatía —comentó Mónica.

—Se me ocurre algo —dijo Javier exaltado por su idea—. Tomemos, cada uno de nosotros, el nombre de un matemático que nos identifique o porque nos guste su obra y comencemos a llamarnos de esa manera, al menos en esta clase.

—Si todos están de acuerdo, me encantaría —asintió Daniel. Eso sí —dijo con el rigor pedagógico que lo caracterizaba—, cada uno debe presentar una breve biografía del matemático que eligió al inicio de cada clase, digamos de unos 10 minutos. ¿Qué les parece?

Todos estuvieron de acuerdo, con la actividad surgida y comenzaron a organizarse.

—Yo quiero ser el primero —dijo Javier— por ser el de la idea.

—Perfecto, de aquí en adelante en cada clase comenzaremos con la biografía de un matemático.

—Y usted también Señor —señaló Pedro.

—Por supuesto, yo también.

Finalizada la clase, Daniel se apresuró a buscar a Camila. Estaba impaciente por contarle sobre su clase y en lo que había derivado su comentario de Hipatía.

MI NOMBRE ES CARL FRIEDRICH GAUSS

A la semana siguiente, la clase del 3º medio del plan diferenciado, comenzó con lo planeado en la clase anterior. Y tal como estaba acordado, Javier dio inicio a su disertación y lo hizo de modo tal, que dio una pauta para las futuras presentaciones.

—Mi nombre es Carl Friedrich Gauss —comenzó narrando Javier— y voy a contarles mi historia.

Cuando tenía diez años, mi profesor solicitó a la clase que encontráramos la suma de todos los números comprendidos entre uno y cien. El maestro, pensando que con ello mantendría ocupados a los alumnos algún tiempo, quedó asombrado cuando enseguida levanté la mano y le respondí 5.050. Me pidió que pasara a la pizarra y que explicara mi procedimiento. Le expliqué que había considerado los números en duplas y los había sumado así:

$1 + 100 = 101$

$2 + 99 = 101$

$3 + 98 = 101$

…

$50 + 51 = 101$

—Como se forman 50 pares de números que dan 101, entonces multipliqué $50 \cdot 101$ y ese producto me dio la respuesta, o sea 5.050.

Recuerdo muy bien que mi maestro me dijo que era una promesa en las matemáticas y yo me sentí muy feliz. La verdad es que no tengo claro de dónde salió esa habilidad numérica que desde muy niño tuve, incluso llegué a descubrir algunos errores de cálculo que mi padre, que era albañil, tenía en unas planillas de pago.

Entre los 12 y 13 años —prosiguió— hice una crítica sobre los fundamentos de la geometría euclidiana y me preocupé sobre las posibilidades de la geometría no euclidiana, ya que si negaba el quinto postulado, permitiendo que se trazaran más de una paralela por un punto dado, se obtenía una geometría totalmente consistente. Dos años después y tras muchas horas de trabajo, probé el binomio de Newton.

Todos seguían muy atentos cada palabra, escritura, gesto y movimiento de Javier.

Gracias a mis habilidades matemáticas el duque de Brunswick, dispuso costear mi educación secundaria y universitaria, lo que agradecí mucho y pensé en dedicarme a la lingüística, pero las matemáticas eran una atracción irresistible para mí.

Mientras estudiaba en Gotinga, descubrí que podía construir un polígono regular de diecisiete lados, usando sólo la regla y el compás. Cuando le conté a mi profesor se mostró escéptico y me dijo que lo que sugería era imposible; pero finalmente, demostré que tenía la razón y fui reconocido por ello. Me acuerdo muy bien de esa fecha, el 30 de marzo de 1796. Más adelante determiné la fórmula para construir los demás polígonos regulares con la regla y el compás.

El año 1798 me gradué en Gotinga y al año siguiente recibí mi doctorado en la Universidad de Helmstedt. Pero no crean que sólo las matemáticas me interesaban. También la astronomía, la física, los idiomas para lo cual tenía facilidad y crear algunos inventos.

En 1833 inventé un telégrafo eléctrico que usé entre mi casa y el observatorio, a una distancia de unos dos kilómetros. Inventé también un magnetómetro bifiliar para medir el magnetismo y con Weber, proyectamos y construimos un observatorio no magnético.

En 1807 fui nombrado director del observatorio y profesor de astronomía en la Universidad de Gotinga y por esos años publiqué mis "Disquisiciones Aritméticas", que era un análisis de la teoría de números, comprendiendo las complicadas ecuaciones que confirmaban mi teoría y una exposición de una convergencia de una serie infinita. Estudié la teoría de los errores y deduje la curva normal de la probabilidad, que todos comenzaron a llamar curva de Gauss, lo que me llenaba de orgullo y que se usa en los cálculos estadísticos.

En 1840, investigué sobre la óptica y fueron importantes mis deducciones por lo referido a los sistemas de lentes.

—Hoy, mi espíritu ha venido a conversar con ustedes —finalizó Javier— para contarles sobre mi vida y que esta terminó a los setenta y siete años y que mi lápida fue escrita con un diagrama, que construí yo mismo, de un polígono de diecisiete lados.

Sé que en la posteridad he sido reconocido como el matemático más grande de los siglos XVIII y XIX lo cual agradezco mucho. Espero que ustedes lleguen a ser grandes matemáticos, lo que implica mucha dedicación y sacrificio, pero la recompensa es infinita.

Un gran aplauso felicitó y agradeció el trabajo de Javier.

—Muchas gracias Javier —dijo Daniel maravillado de lo que estaba ocurriendo con sus alumnos y con su clase de matemática. —Tu presentación ha sido brillante. Me gustaría que nos dijeras, por qué elegiste este matemático como alguien que te representa.

—Apenas comencé a leer su biografía —comentó Javier—, me vi reflejado ya que cuando niño, al igual que a Gauss, mi profesor me dijo que iba a ser un gran matemático porque había resuelto rápidamente un ejercicio que nos había dado y también me gusta inventar objetos diversos, tal cual como hacía Gauss.

—Perfecto, amigo Gauss —dijo Daniel—, esperamos grandes aportes a esta asignatura de tu parte.

—Dicho y hecho —respondió Javier, con la satisfacción de sentirse gratamente valorado.

El misterio de la Racionalización

—Camila, ahora que quiero explicar para qué sirve cada contenido que paso en clases, me estoy metiendo en muchos problemas —comentó Daniel.

—No entiendo bien a qué te refieres.

—Es que he buscado en todos los textos de 3º medio e incluso a nivel universitario y ninguno me saca de la duda: ¿para qué se racionaliza? Y me da rabia no saber algo que vengo enseñando hace tanto tiempo —se quejó Daniel.

—Yo tampoco sé de dónde viene ni por qué se racionaliza, pero debe haber alguna explicación lógica.

—Una vez leí en una revista científica —contó Daniel— que la racionalización se utilizaba para obtener resultados con una mayor precisión a nivel científico, pero nunca lo volví a leer en otra parte y no estoy seguro que eso sea así.

—¿Y por qué no lo verificamos? —desafió Camila.

—Tienes razón —aprobó Daniel—. En vez de estarme quejando, tratemos de sacar alguna conclusión. Me ayudas entonces…

—Por supuesto, ahora yo también estoy interesada en el tema.

—Tendríamos que tomar algunas expresiones y racionalizarlas. Luego reemplazar la raíz por su valor y verificar si el resultado de la expresión, antes de racionalizar con la que resulta después de racionalizar, ha tenido alguna variación.

—Exactamente —apuntó Camila— manos a la obra.

—Consideremos, por ejemplo, la expresión $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ —dijo Daniel tomando una hoja para realizar el procedimiento—. Al racionalizarla por $2+\sqrt{2}$, obtenemos $3+2\sqrt{2}$.

—Sería conveniente y nos puede servir en nuestras conclusiones que amplifiquemos por otras expresiones irracionales para ver qué resulta —sugirió Camila.

—De acuerdo —expresó Daniel— voy a amplificar por $\sqrt{2}$, tú entretanto lo haces por $2-\sqrt{2}$.

—Obtuve $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$ —dijo Camila—. ¿Y tú?

—Resultó $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ —contestó Daniel —. Ahora calculemos la expresión original y las obtenidas reemplazando $\sqrt{2}$ por su valor con todos los decimales que nos de la calculadora. Es decir:

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 5{,}82844\ldots$$

$$3+2\sqrt{2} = 5{,}82842\ldots$$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 5{,}82842\ldots$$

$$\frac{1}{3-2\sqrt{2}} = 5{,}82842\ldots$$

—No veo nada especial —señaló Camila— yo esperaba alguna diferencia que justificara el racionalizar expresiones irracionales.

—Como te dije, alguna vez leí algo sobre esto relacionado con la aproximación. ¿Qué te parece si hacemos el reemplazo de $\sqrt{2}$, pero en forma aproximada, por ejemplo por 1,414?

—Probemos a ver qué resulta.

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 5{,}825$$

$$3+2\sqrt{2} = 5{,}828$$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 5{,}830$$

$$\frac{1}{3-2\sqrt{2}} = 5{,}813$$

—¿Qué te parece ahora lo que obtuvimos? —preguntó sonriente Daniel.

—¡Una maravilla! —exclamó Camila y lo feliz que se sentía se le notaba en el intenso brillo de sus ojos.

—O sea, al trabajar con el valor de $\sqrt{2}$ en forma aproximada, el valor que más se acerca al valor correspondiente a la expresión es el que resulta de racionalizar en la forma habitual que trabajamos en clases, o sea $3+2\sqrt{2} = 5{,}828$ —concluyó Daniel.

—Por fin sabemos por qué estamos haciendo esto.

ENTRE RISAS Y SEMEJANZAS

Aquella mañana lo primero que hizo en el segundo año medio fue verificar si todos habían traído la regla solicitada la clase anterior para desarrollar la actividad del día. Mientras lo hacía, Álvaro le llamó preguntándole si podía contar un chiste matemático.

—Espero que sea bueno —dijo Daniel.

—¿Cuál es la enfermedad del 1 + 2? —preguntó Álvaro en voz alta.

—No se me ocurre nada —respondió Daniel.

—¡Estrés! —dijo Álvaro riendo.

—Yo sé otro señor —indicó Romina con énfasis.

Un hombre pesa 70 kilos y va a cruzar un puente para peatones. El puente, recién construido, aguanta 80 kilos. Como él es muy precavido se sacó la mochila que pesaba 5 kilos y la dejó a un lado para atravesar sin ella. Al caminar sobre el puente, éste se derrumba. ¿Por qué?

—Pero ese no es un chiste es un problema —dijo Daniel—. Matemáticamente no me cuadra, está todo correcto.

—Muy fácil profe, —explicó Romina—. El puente se cayó porque "hombre precavido vale por dos". —todos rieron.

—El último, el último, por favor profe —suplicaba Mario.

—Está bien, pero que sea el último —le contestó Daniel.

—¿Cuántas personas caben en una ballena? —preguntó Mario.

—Me imagino que bastantes —respondió Daniel.

—Equivocado señor, no cabe ninguna persona porque "va llena" —corrigió Mario riéndose.

—¿Y saben ustedes por qué se suicidó el libro de matemática? —preguntó a la clase Daniel.

—No respondieron unos, por un error de cálculo, otros, …

—No, —corrigió Daniel—, porque tenía muchos problemas.

Después de ese divertido inicio, la clase comenzó con un ambiente muy distendido y agradable.

—Quiero que extraigamos algunas conclusiones —comenzó diciendo Daniel— de algunas actividades que les iré proponiendo durante la clase.

En primer lugar, dibujen, un segmento de 4 cm y otro de 6 cm y a la derecha de estos, coloquen la razón en que se encuentran los trazos respectivos.

Todos hicieron lo indicado sin ninguna dificultad y colocaron la razón 2:3.

—Bien, ahora dibujen —dijo Daniel— dos cuadrados cuyos lados sean también 4 cm y 6 cm y establezcan respectivamente la razón entre los perímetros y las áreas de los cuadrados.

Después de algunos minutos, Daniel hizo algunas preguntas.

—¿Cuál es la razón entre los perímetros de los cuadrados? —interrogó.

—Dos es a tres —respondieron a una voz.

—Yo tengo 16:24 —contestó Mario.

—¡Simplifica! —propuso en voz alta Raquel.

—¡Ya, ya! —respondió Mario—, no me había dado cuenta.

—¿Y cuál es la razón entre las áreas respectivas de los cuadrados hechos? —interrogó nuevamente Daniel.

—2:3 —respondió de inmediato Álvaro.

—¿Estás seguro de lo que afirmas?

—No señor, en realidad lo dije porque los dos anteriores salieron 2:3.

—Lo mejor es comprobar y ver si la conclusión que obtuviste es cierta.

—No señor, Álvaro está equivocado —aseguró Sofía—. Las áreas son $16cm^2$ y $36cm^2$, al establecer la razón entre ambos y simplificar, resulta 4:9.

—Tienes razón —reconoció Álvaro.

—Ahora vamos a reiterar toda la actividad hecha —indicó Daniel—, pero considerando dos trazos de medida 8 cm y 6 cm.

Todos hicieron lo que correspondía en unos cuantos minutos y concluyeron que las razones de los segmentos, de los perímetros y de las áreas eran respectivamente 4:3, 4:3 y 16:9.

—Ahora que ya hicimos estas dos actividades, saquemos algunas conclusiones.

—La razón entre los segmentos es la misma que la de los perímetros de los cuadrados —concluyó Maribel.

—¡Excelente Maribel! —aprobó Daniel—. ¿Qué otra conclusión extraen?

Se produjo un silencio total y todos manifestaban una actitud pensante.

—Yo tengo una idea —dijo tímidamente Pamela—. La razón de las áreas, se extrae multiplicando la razón de los segmentos por sí mismos.

—No entiendo eso —comentó Mario.

—¿Puedes explicarlo un poco más? —sugirió Daniel.

—En el primer caso, la razón de los segmentos era 2:3, si multiplicas $2 \cdot 2$ y $3 \cdot 3$ resulta la razón 4:9, que es la del área del cuadrado. Lo mismo pasa con el segundo caso.

—Tienes razón —dijo Sofía— entonces, sería la razón de los segmentos al cuadrado.

—¡Eso es! —gritó Álvaro.

—Me alegro que hayan llegado solos a establecer las conclusiones —expresó orgulloso Daniel.

—Y como lo descubrió la Pamela García —dijo Mario—, lo podemos llamar el "Teorema de García".

Todos se rieron y también discutieron si no sería mejor llamarlo el "Teorema de Pamela" o el de "Pame", como generalmente la llamaban.

Pero esto no termina aquí señores —continuó Daniel—. Quiero que ahora construyan dos cubos de aristas 4 y 6 respectivamente y determinen la razón respectiva entre sus volúmenes.

—Yo lo voy a descubrir primero —desafió Mario— así tendremos el "Teorema de Jorquera" —dijo muerto de la risa.

—No sueñes —le respondió Raquel.

Hicieron los dibujos y concluyeron que ahora la razón entre los cubos correspondía al cubo de la razón de las aristas.

—Voy a dejarles un trabajo para la próxima semana —dijo Daniel, asegurándose que la tarea fuera comprendida por todos.

Consideren las siguientes figuras: un triángulo equilátero de lado 5 cm un rectángulo de lados 10 cm y 3 cm, una circunferencia de 5 cm de radio y un triángulo rectángulo de catetos 6 cm y 8 cm.

Agranden todas estas figuras de modo tal que lo que mide 5 cm pase a medir 8 cm; el resto de las medidas se deben ajustar a ese criterio para mantener la proporción. Extraigan conclusiones sobre lo que hagan y la traen escrita. ¿Está todo claro?

—¡Siii, profe! —respondieron todos—. Claro como el agua.

EL ORO PERFECTO

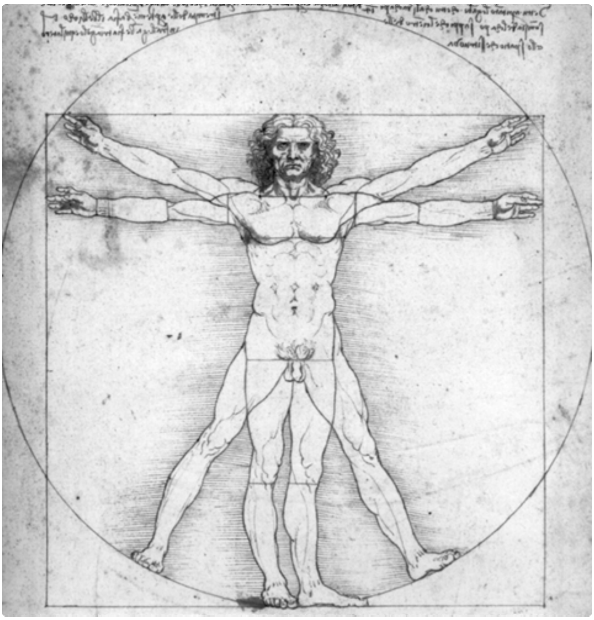
Daniel entró a la sala del segundo año medio y de inmediato la curiosidad se apoderó de los alumnos y alumnas al verlo llegar con un metro de carpintero y una cartulina enrollada.

—Señor, ¿qué vamos a hacer? —preguntó Lorena.

—¿Qué se trae hoy entre manos profe? —preguntó intrigado, Mario

—Hoy vamos a conocer al hombre y la mujer perfecta —expresó Daniel dirigiéndose a su escritorio y soltar el metro.

—Primero hablaremos del hombre de Vitrubio y diciendo esto, desenrolló la cartulina y con masillas la pegó firmemente a la pared y a la vista de todos.



De un documento que sacó de su maletín, comenzó a leer lenta y pausadamente: "... el ombligo es el punto central natural del cuerpo humano, ya que si un hombre se echa sobre la espalda, con las manos y los pies extendidos, y coloca la punta de un compás en su ombligo, los dedos de las manos y los de los pies tocarán la circunferencia del círculo que así trazamos. Y de la misma forma que el cuerpo humano nos da un círculo que lo rodea, también podemos hallar un cuadrado donde igualmente esté encerrado el cuerpo humano. Porque si medimos la distancia desde las plantas de los pies hasta la punta de la cabeza y luego aplicamos esta misma medida a los brazos extendidos, encontraremos que la anchura es igual a la longitud, como en el caso de superficies planas que son perfectamente cuadradas".

Sólo se escuchaba el silencio y todas las miradas se concentraban en la figura puesta en la pared.

—Como ven —continuó Daniel—, frente a ustedes tienen un círculo y un cuadrado que delimitan las dimensiones de la figura humana. Este dibujo se ha convertido en un auténtico símbolo universal, ya que recoge varias de las ideas claves del pensamiento renacentista: "el hombre como medida de todas las cosas, la belleza ajustada a cánones, equilibrio, proporción y demás". Leonardo da Vinci hizo este dibujo para ilustrar, en 1509, el libro "La Divina Proporción" de Luca Pacioli. En la obra, se explican las proporciones que han de guardar las construcciones de índole artística. La propuesta se basa en las relaciones áureas, es decir, la relación entre la altura del hombre y la distancia del ombligo a la punta de los dedos de la mano, llamado número de oro cuyo valor es 1,61803398…

—Bueno —exclamó Daniel— menos "bla bla" y vamos a lo práctico. Necesito un voluntario que quiera probar si sus medidas son las del hombre perfecto de Da Vinci.

—Yo profe —se ofreció Mario, alzando la mano.

—Bien. Pasa adelante y Sofía se hará cargo de tomar las medidas que necesitamos para hacer la verificación. Todo el curso quedó expectante, esperando el resultado.

Sofía midió primero la estatura, sin zapatos, de Mario. Este medía 168 cm, luego midió la distancia desde su ombligo hasta el piso, lo que dio 105 cm Se anotaron ambas medidas en la pizarra y todos comenzaron a dividir 168:105, resultando exactamente 1,6. Mario se fue muy contento a su asiento por ser un hombre "casi" perfecto.

Varios alumnos y alumnas más, quisieron averiguar cuán cerca estaban de esa medida llamada el número de oro.

Finalizada la experiencia del número de oro, Daniel propuso una nueva actividad. —Saquen su regla —instruyó— que nos vamos a dedicar a medir el largo y ancho de todos los objetos rectangulares que tengan en sus puestos o que se encuentren en la sala. El objetivo es, encontrar si alguno es un rectángulo dorado.

—¿Qué es un rectángulo dorado? —preguntó Raquel, mientras todos guardaban un absoluto silencio, esperando la respuesta para iniciar el trabajo.

—Son rectángulos —anótenlo, sugirió Daniel—, son rectángulos cuya razón entre su largo y su ancho es igual al número de oro. Y para que el trabajo sea ordenado, y productivo, trabajen en grupos de dos. Uno mide y el otro anota en el cuaderno el nombre del objeto, el largo y el ancho. Luego, en conjunto, dividen para establecer la razón entre ellos y anotan el resultado final.

—¿Cuántos decimales usamos al dividir? —consultó Mario.

—Usen como mínimo tres decimales —fue la respuesta de Daniel.

Comenzaron a medir cuadernos, textos, gomas, mesas, interruptores, etc. y no había ni un alumno que no estuviese trabajando. Eso alegraba mucho a Daniel, pero de vez en cuando le bajaba su antiguo tradicionalismo y pensaba si no sería mejor entregarles una guía con muchos ejercicios para resolver. Pensando en eso estaba, cuando terminaron la actividad y surgió una nueva pregunta.

—Señor, —dijo Maribel—, es fácil hacer un rectángulo, pero ¿cómo podemos construir uno que sea dorado?

—Vayan siguiendo mis instrucciones —le respondió Daniel— y en unos momentos tendrán su propio rectángulo dorado.

A Daniel le había gustado esa pregunta porque podría observar si sus alumnos y alumnas sabían seguir instrucciones orales.

Construyan un rectángulo de vértices AEFD y designen como M el punto medio de DF —comenzó diciendo Daniel—. Prolonguen DF.

Esperó que todos lo hicieran y continuó.

—Con centro M y radio ME, dibujen un arco desde E hasta la línea DF en un punto que designaremos C. Construyan una perpendicular a DC en C. Y Ahora, —continuó—, prolonguen AE hasta cortar la perpendicular anterior en B. Los rectángulos ABCD y EFGB son rectángulos dorados o áureos.

—Qué entretenido, me gustó la actividad —opinó Romina.

—Me alegro mucho y los felicito por el trabajo realizado —les expresó Daniel—. Continuaremos la próxima clase, para ir concluyendo algunas propiedades de la proporcionalidad que es necesario aprender.

—¡Señor! —gritó Álvaro para evitar que Daniel se fuera sin escuchar su pregunta—. ¿Existe el triángulo dorado?

Un abrupto silencio se produjo y todos se quedaron esperando la respuesta del profesor. Daniel, detuvo sus pasos, como adivinando un nuevo desafío y reconociendo que no tenía una respuesta, dijo: —Francamente, no lo sé, pero voy a investigar y creo que ustedes también deberían hacerlo y lo que encontremos, lo vemos la próxima clase.

Se alejó de la sala con una sonrisa. No sabía por qué estaba contento de expresar que no sabía lo que le habían preguntado. Tal vez porque lo reconoció con naturalidad o porque era motivante terminar la clase con un desafío para él y para todo el curso. En fin, se daba cuenta que su clase ya no era como antes.

En el recreo, le contó a Camila lo bien que le habían resultado las actividades sobre proporcionalidad. Aprovechó de preguntarle si sabía de la existencia del triángulo dorado, pero ella tampoco había escuchado sobre eso.

ATLETISMO NUMÉRICO

—Señor, mi papá me contó que usted practicaba atletismo cuando era joven —dijo Estefanía.

—¿Cómo es eso de "cuando era joven"? —reclamó Daniel sonriendo—. ¿Tan viejo soy?

—No señor no quise decir eso —dijo Estefanía, mientras el color de sus mejillas tomaban un rojizo color.

—Es broma, no te preocupes —aclaró Daniel—. Con respecto a lo que me preguntas, sí, es cierto. Estuve muchos años practicando atletismo y no sólo eso, también fútbol y tenis.

Ricardo, que alcanzó a escuchar la conversación, preguntó ¿Y aplicaba la matemática en el deporte?

—No seas tonto —le contestó Elena—, nada que ver una cosa con la otra.

—Elena, no trates así a tu compañero —le llamó la atención Daniel— además que estás equivocada en lo que acabas de asegurar.

—¿Por qué? —dijo Elena, sorprendida.

—Porque sí tienen relación, en cada entrenamiento de atletismo que teníamos debíamos controlar nuestras pulsaciones y con base en algunas fórmulas y tablas obteníamos muchas indicaciones sobre el ritmo que habíamos llevado en el entrenamiento, también nos daba señas sobre nuestra condición física y otras cosas.

—¿Y nos podría enseñar eso? —dijo Nicol—, parece entretenido.

—Por supuesto, además que justo se propone en la unidad "Números" que estamos trabajando y sé que a algunos de ustedes, que son parte de la selección de atletismo del colegio, les va servir bastante.

—Lo primero —introdujo Daniel— es que todos aprendan a tomarse el pulso y los mejores lugares de nuestro cuerpo para hacerlo, son la muñeca o el cuello. ¿Ubicaron ya las pulsaciones?

—Sí señor —respondieron a coro algunos.

—Ahora, cuenten cuántas pulsaciones tienen en 15 segundos. ¿Qué tendrían que hacer para luego obtener sus pulsaciones por minuto?

—Multiplicarla por 4 —respondió María Paz.

—Exactamente —le confirmó Daniel.

Todos hicieron lo indicado y pronto empezaron a comparar las diferencias que habían entre unos y otros.

—Señor, ¿daría lo mismo si cuento mis pulsaciones por 30 segundos y multiplico por 2? —consultó Ester.

—Sí, el resultado es el mismo —dijo Daniel—. Aprovechemos que tienen la cantidad de latidos por minuto y, antes de entrar a la parte atlética, calculemos la cantidad de latidos en una hora, en un día y en un año.

Todos comenzaron a efectuar los cálculos de acuerdo a las pulsaciones que habían obtenido.

—¡Medios números que salieron! —expresó Nicol—, mis pulsaciones son 70 por minuto, eso me dio 4.200 en una hora, 100.800 en un día y 36.792.000 en un año.

—Pues ahora sí que van a encontrar un gran número —anunció Daniel—. Determinen cuántas pulsaciones llevan aproximadamente, desde su nacimiento hasta el día de hoy.

—Se voló, señor —dijo Ester.

Y todos se entretuvieron, tomándose y calculando las pulsaciones que habían tenido en su vida.

—¿Nicol, cuánto te dio en total? —preguntó Daniel.

—522.345.600 pulsaciones hasta hoy día —respondió.

—A mí me dio hartos millones —dijo María Paz.

—A propósito de millones —dijo Daniel— ¿Sabían que 1 millón es 1.000 veces 1.000, en cualquier lugar del mundo, pero un billón depende de dónde estés en el mundo? En los Estados Unidos, un billón son mil millones es decir 1.000 veces 1 millón, pero en Gran Bretaña, Francia, y otros países, 1 billón es 1 millón por 1 millón.

—No tenía idea de esa diferencia —expresó Estefanía, al igual que la mayoría.

—Como les estaba diciendo anteriormente —dijo Daniel, volviendo al tema principal de la clase—, la frecuencia cardiaca nos da información sobre el grado de esfuerzo que se hace mientras corres. Cada latido bombea una cantidad determinada de sangre hacia el torrente sanguíneo, para nutrir los músculos y oxigenarlos adecuadamente.

—¿En qué ayuda correr tanto? —consultó Ángel.

—Hay razones físicas y síquicas. Corriendo te liberas de tensiones, desarrollas un corazón más grande que impulsa la sangre con más fuerza que el de una persona sedentaria. Estar entrenado, permite a tu corazón bombear más sangre con menos esfuerzo, es decir, con menos latidos.

—Yo tuve 72 pulsaciones por minuto, eso ¿es bueno o malo? —preguntó Ester.

—La persona entrenada —explicó Daniel— puede llegar a tener 40 pulsaciones por minuto en reposo, mientras que una persona sedentaria llega a tener entre 70 y 80 pulsaciones. Hay fórmulas que permiten calcular tu máxima frecuencia cardiaca o pulsaciones. Conocer esta cifra es muy importante, en especial para el entrenador que te guiará en tu plan de ejercicios a desarrollar.

—¿Nos puede dar la fórmula, profesor? —pidió Estefanía.

—Es muy simple, sólo tienen que restar 220 menos la edad. Hagan ese cálculo y determinen su frecuencia cardiaca máxima. El valor que obtengan, les indica el número máximo de pulsaciones a la que deben llegar con un ejercicio físico.

—Señor —dijo Ricardo—, entonces si yo tengo 40 pulsaciones en reposo y otro tiene 80, en una carrera de 400 metros, por ejemplo, el que tiene más pulsaciones va a llegar a su máximo rápidamente y yo a medio ritmo le podría ganar.

—Por eso es tan importante el entrenamiento. Además, un buen entrenador nunca los va a forzar al máximo todos los días ni en todos los ejercicios —explicó Daniel—. Él ira combinando trabajos que los lleven a un cuarto, a la mitad, a los tres cuartos y algunas veces, como en las competencias, al máximo de su frecuencia cardiaca.

—Y usted tenía que hacer eso cuando practicaba atletismo —consultó Andrés.

—Por supuesto, y todavía me acuerdo, de esos planes. Por ejemplo en una semana tenía que realizar lo siguiente:

Lunes: 6 veces 200 metros a $\frac{3}{4}$ de velocidad.

Martes: 1.600 metros a $\frac{3}{4}$ y 4 piques de 45 metros.

Miércoles: 400 metros a ritmo y luego 400 metros al máximo.

Jueves: 1.600 metros, 50 metros a máxima velocidad y 50 a media velocidad.

Viernes: Trote para prepararnos para la competencia.

Sábado y Domingo: Competencia.

—¡Qué espectacular, profe! —exclamó Elena y agregó sonriendo— pero aún no me lo imagino corriendo en una pista o en una maratón por las calles. Daniel también sonrió y por su mente pasaron tantos gratos recuerdos de ese tiempo.

—El profesor de Educación Física nos avisó que la próxima semana nos va a aplicar el Test de Cooper —le contó Andrés—. ¿Usted lo hizo alguna vez?

—Muchas veces —respondió Daniel— ya que entrega información sobre el volumen máximo de oxígeno, que nuestro organismo puede transportar en un minuto. Y esa es la manera más eficaz de medir la capacidad aeróbica de un individuo, ya que cuanto mayor sea el VO2max, mayor será la capacidad cardiovascular.

—Señor eso no lo entiendo mucho, podría darnos un ejemplo práctico —sugirió Elena.

—El volumen máximo de oxígeno —comenzó a explicar Daniel— es expresado generalmente en litros y los atletas que corren maratones son los que tiene los niveles más altos, llegando a alcanzar 6 litros de capacidad, cuando lo común es tener unos 2 litros. Para medir esta capacidad se utiliza el test de Cooper, que consiste en correr sin parar tratando de cubrir la mayor distancia posible en 12 minutos, luego se emplea la fórmula

$$VO2max = \frac{Distancia\ recorrida - 504}{45}$$

…y listo, Pero veámoslo con un ejemplo como tú querías. Pasa a la pizarra y te explico. Supongamos que haces el test de Cooper y logras correr 1.500 metros. Calcula tu volumen máximo de oxígeno.

Elena escribió en la pizarra

$$VO2max = \frac{1500 - 504}{45} = 22{,}133$$

—Ahora —continuó Daniel dándole instrucciones—, multiplica tu peso por el valor obtenido.

—Yo peso aproximadamente 60 kilos, así que el producto me da… —hizo el cálculo— 1.327, ¿qué unidad profe? —preguntó Elena.

—Mililitros —respondió Daniel—. Pásalo a litros ahora.

—Son 1,326 litros de consumo de oxígeno, —concluyó Elena.

—¿Cómo se puede determinar qué persona tiene mejor condición física si ambos tienen el mismo consumo de oxigeno? —consultó Javier.

—En ese caso, tendrá mejor condición física el que pese más. Por ejemplo en el caso anterior, si una persona que pesa 90 kilos hubiese corrido 1.500 metros en el test de Cooper, su VO2max sería 22,133 por 90, o sea 1,991 litros.

—¿Y correr sirve, como dicen por ahí, para bajar de peso? —consultó Nicol.

—Sí, pero manteniendo ciertas condiciones y con una dieta adecuada. Por ejemplo: tu frecuencia cardiaca máxima es 220 menos 15, o sea 205; de este valor, debemos obtener el 65% que es 133 pulsaciones por minuto aproximadamente. Eso significa que al ejercitarte necesitas llegar a esa cantidad de latidos por minuto para lograr un umbral aeróbico; pero eso no basta, ya que si no lo mantienes durante un cierto tiempo, el esfuerzo será en vano.

—¿Y por cuánto tiempo, más o menos? —volvió a consultar Nicol.

— El tiempo promedio recomendado es de 35 minutos mínimos para comenzar a utilizar las reservas de grasa corporal como energía y así mismo perder grasa corporal. Pero el tiempo adecuado es mejor que siempre lo determine un especialista.

—Se nota que usted practicaba atletismo —concluyó Nicol esbozando una sonrisa.

MODELOS DE LA VIDA

—Hoy vamos a aplicar todos nuestros conocimientos sobre la función exponencial —dijo Daniel al cuarto año medio—, desarrollando algunos problemas que son una muestra clara de la aplicación que tiene la matemática, en especial la que ustedes están aprendiendo en el colegio.

—En primer lugar vamos a analizar el modelo matemático, relacionado con el crecimiento de una población, dada por la expresión $P(t) = P_0 e^{kt}$. Entonces, ¿Cuál es la población aproximada de Iquique el año 2000, si en 1980 era de 120.000 habitantes y en 1990 de 180.000 habitantes? Les doy unos minutos para que lo resuelvan.

Todos se concentraron en sus cálculos y luego comenzaron a intercambiar opiniones y a comparar sus respuestas.

—Listo señor, ¿paso a hacerlo en la pizarra? —preguntó Pilar.

—Sí y explica todo el procedimiento por favor —pidió Daniel.

—Reemplacé —procedió Pilar—, los valores dados y obtuve que $180.000 = 120.000e^{10k}$. De esta expresión, despejé y simplifiqué, por lo que obtuve que $e^{10k} = \frac{3}{2}$

—¿Cuál es el objetivo de tu procedimiento? —preguntó Daniel.

—Determinar el valor de k —respondió Pilar—. Ahora aplico logaritmo natural a la expresión y resulta $10k = \ln 1{,}5$ de donde se obtiene que k=0,041.

—Está correcto —evaluó Daniel.

—Por lo tanto nuestro modelo es $P(t) = 120.000e^{0{,}041t}$ y ahora faltaría calcular la población para el año 2000. Entonces, determinamos t, que corresponde a la diferencia entre 2000 y 1980, o sea, 20 años.

Entonces,

$P(20) = 120.000e^{0,041 \cdot 20} = 120.000e^{0,82} = 120.000 \cdot 2,27$ lo que da 272.000 habitantes, aproximadamente, que tendrá Iquique el año 2000.

—Muy bien Pilar. Te felicito por tu clara explicación.

—Gracias señor —expresó orgullosa Pilar y se fue a su puesto.

—Vamos a nuestro segundo análisis —dijo Daniel— que corresponde a "un modelo de aprendizaje".

De acuerdo a algunas investigaciones, en una sesión de memorización de palabras en idioma extranjero, la cantidad máxima posible es de 150 palabras. El modelo para esta situación está dada por $N(t) = 150(1 - e^{-0,32})$ donde el valor 0,32 corresponde a la capacidad de concentración de una persona normal. ¿Cuántas palabras pueden memorizarse en una hora?

Y dio nuevamente algunos minutos para que los alumnos resolvieran.

—Pasa Alex y haz el desarrollo del problema explicando cada paso.

—Como el tiempo corresponde a una hora, reemplacé t por 1, quedándome la expresión así —y anotó— $N(t) = 150(1 - e^{-0,32})$ como el exponente de e es negativo, invierto para trabajarlo positivo, entonces resulta $N(1) = 150\left(1 - \frac{1}{e^{0,32}}\right)$. Usé la calculadora para determinar $\frac{1}{e^{0,32}}$ lo cual me dio en forma aproximada 0,73. Una vez teniendo ese valor, hice el cálculo final, es decir: $150 \cdot (1 - 0,73) = 150 \cdot 0,27 = 40,5$

En conclusión, se pueden memorizar aproximadamente 41 palabras en idioma extranjero en una hora —aseguró Daniel a los alumnos.

—¡Que buen dato señor! —exclamó Carolina—, esto nos va a servir para planificar nuestro estudio de idiomas.

—Y pensar que yo he tratado de memorizar como 100 palabras en menos de una hora, con razón —reconoció Emilio—, jamás lo he logrado en un cien por ciento.

—¿Se dan cuenta de la gran ayuda que les brinda la matemática para estudiar en forma óptima? —preguntó Daniel e hizo una pausa, para dar lugar a que todos pensaran en ello; y tal vez también, si podrían aplicar el modelo a otras asignaturas.

Vamos a la siguiente situación que tiene que ver con la modelación que permite determinar el grado de alcohol de una persona, dada por $R = 6e^{kx}$, donde R corresponde al riesgo de un accidente, medido en porcentaje y x es la concentración variable de alcohol en la sangre. Por ejemplo —agregó Daniel— si la concentración de alcohol es de 0,04; el riesgo de tener un accidente es del 10%. Basado en esto, determinen el valor de la constante k, luego con ese mismo valor, determinen el riesgo de accidente si la concentración es 0,17 y luego la concentración de alcohol correspondiente a un riego del 100%.

—Efectúen los cálculos y luego revisamos.

Una vez finalizados los ejercicios, comenzó la revisión.

—¿Señor, paso a determinar la constante? —preguntó Ignacio.

—Pasa y no te olvides de ir explicando el procedimiento para todo el curso.

—En este caso, tenemos el valor de riesgo R y la concentración de alcohol por lo que la expresión $R = 6e^{kx}$ queda como $10 = 6e^{0,04k}$. Para determinar la constante k, debemos aplicar logaritmo a la expresión, obteniéndose

$$\ln 10 = \ln 6 + 0{,}04k \text{ de donde } k = \frac{\ln 10 - \ln 6}{0{,}04} = 12{,}75$$

—Perfecto, ya tenemos el valor de la constante k —señaló Daniel—, ¿quién quiere seguir con la otra interrogante?

—Yo —dijo Boris, poniéndose de pie rápidamente—. Hay que determinar el riesgo de accidente con una concentración de alcohol de 0,17; por lo tanto $R = 6 \cdot e^{0,17 \cdot 12,75} = 6 \cdot e^{2,17}$ de aquí se obtiene que R = 6 ·8,75 = 52,55; o sea, un 52,55% de riesgo de accidente.

—Falta determinar la concentración de alcohol que corresponde a un 100% de riesgo.

—Yo lo hago —dijo Emilio—. Comienzo reemplazando R y la constante k, entonces $100 = 6e^{12,75x}$ y le aplico logaritmo natural a la expresión, entonces

$$\ln 100 = \ln 6 + 12,75x \text{ de donde } x = \frac{\ln 100 - \ln 6}{12,75} = 0,22$$

Esa es la concentración que implica un 100% de riesgo de accidente.

—Para finalizar —propuso Daniel—, determinemos la concentración de alcohol que debe tener en la sangre un conductor para ser arrestado, según la ley que establece que debe aplicarse esa medida, cuando el riesgo de tener un accidente es de 20% o mayor. Pasa Diana a hacer el procedimiento.

—Reemplazo —dijo Diana y anotó $20 = 6e^{12,75x}$—, ahora le aplico logaritmo natural y resulta $\ln 20 = \ln 6 + 12,75x$ de donde

$$x = \frac{\ln 20 - \ln 6}{12,75} = 0,09.$$

—En algunos países es de 0.08 y en otros 0.10 —señaló Daniel— y con respecto a este último ejercicio quiero decirles algunas palabras que espero consideren. La concentración de alcohol en la sangre varía según lo mucho o poco que se coma antes o durante la ingesta, también de acuerdo al peso de la persona y el tiempo de ingestión. La oxidación del alcohol no se puede apresurar —prosiguió Daniel—, su proceso se realiza a un ritmo constante, por lo tanto un café, una ducha fría, etc. no sirven para eso. Se calcula, que en una persona sana de 70 kilos, la presencia de alcohol disminuye a razón promedio de 0,10 gr/litro cada hora después de haber dejado de beber. Eso significa, por ejemplo, que después de una fiesta en la que una persona ha ingerido 250 cc. de bebidas alcohólicas de 30 o más grados, deberán transcurrir entre 12 y 15 horas antes que el cuerpo esté completamente limpio de alcohol. Así, si la fiesta comenzó a las 9 de la noche, con toda seguridad todavía habrá presencia de alcohol en el organismo de esa persona a las 8 de la mañana del día siguiente.

Bien, eso es todo por hoy —dijo Daniel y recalcó sonriendo— y espero que se conviertan en defensores de la matemática, cuando alguno les diga que no sirve para nada.

PREGUNTAS QUE COMPLICAN

Aquella reunión de departamento sería la más especial y novedosa que habían realizado jamás en el colegio. Habían acordado en el encuentro anterior, que cada uno de los profesores de matemática, llevaría una o dos consultas sobre preguntas que los alumnos y alumnas hacen habitualmente, que conllevan en sí mismas una complicación y por lo mismo, dar una respuesta satisfactoria y certera en el momento, es a veces un desafío difícil de sortear con éxito.

Para conversar sobre estas situaciones, se había invitado al Doctor en Didáctica de la Matemática, Ivo Matic, quien ya, en algunas oportunidades, les había cooperado en diversas actividades matemáticas del colegio.

—Bien colegas —dijo Ivo— expongan sus consultas y analicemos cómo dar una respuesta satisfactoria a los jóvenes que tienen esas inquietudes.

La primera en preguntar fue Marta.

—Estimado Ivo, primero te agradezco tu presencia y estoy segura que esta será una reunión muy provechosa. Mi consulta tiene que ver con una eterna pregunta que me hacen los alumnos de 7º y 8º básico y, aunque he buscado información en los textos de estudio, estos jamás la aclaran. ¿Por qué menos por menos es más?

—Para responder a muchas de las preguntas que me harán —inició su respuesta Ivo— voy a tener que recurrir a algunos antecedentes históricos que servirán de base para entender mejor los por qué de algunas situaciones. Respecto a tu consulta Marta, lo primero es destacar que los números negativos recién fueron aceptados en los finales del siglo XVIII, aunque en la India los utilizaban desde antes para indicar deudas, pero no con el signo que lo conocemos hoy. Ellos colocaban un pequeño círculo sobre el número para indicar que correspondía a un negativo o a una deuda, como les decían.

—Yo, —comentó Daniel—, leí en unos documentos históricos que a los negativos los llamaban “números falsos”.

—Exactamente, algunos matemáticos le daban ese nombre. Como Cardano, mientras que otros decían que era imposible que existieran, como John Wallis. Fue Euler quien les da plena existencia en un tratado que escribió en 1770. En este ya se registra que el producto de —1 por —1 es 1 y su argumento o demostración es que el producto, o es +1 o es —1, pero como 1 por —1 ya es —1, tendrá que ser +1.

—Pero eso no es una demostración —señaló Rocío.

—Por lo que queda claro que la respuesta a esta pregunta no es fácil ya que la demostración se basa en la no ocurrencia de contradicciones matemáticas, pero sí existen algunas justificaciones que pueden servirles a ustedes para responder, pero antes, veamos una curiosidad.

Cuando alguien señala que “no es cierto que no vaya a ir al estadio”, está expresando una doble negación cuyo significado es que sí va a ir al estadio, es decir, “negación con negación resulta una afirmación”.

En el sur de nuestro país, se utiliza mucho un tipo de respuesta similar que si se tomara con la lógica que corresponde produciría un gran caos. Cuando alguien pregunta, por ejemplo, “¿vas a ir al cine?”, generalmente se responde, “no, no”.

—Es decir —concluyó Marta—, estaría diciendo que sí va a ir.

—Exactamente, pero eso se los cuento sólo como una curiosidad. La anterior, es una explicación basada en la lógica del lenguaje. Vamos ahora a una explicación matemática.

Partamos de la base que $4 \cdot 0$ es 0, lo que los alumnos saben muy bien y efectuemos algunas transformaciones. El producto $4 \cdot 0$ lo podemos escribir, por ejemplo, como $4 \cdot [3 + (-3)]$, aplicamos la propiedad distributiva y obtenemos $4{\cdot}3 + 4{\cdot}(-3)$, o lo que es lo mismo, $12 + 4 \cdot (-3)$; como este producto debe ser 0, concluimos que $4 \cdot (-3)$ debe ser el opuesto de 12, o sea $4 \cdot (-3) = -12$, lo que significa que + por − es menos.

—Esta explicación me gustó, pero aún no se por qué menos por menos es más —dijo Marta.

—Paciencia Marta —dijo sonriendo el profesor Ivo Matic—, a eso vamos. Tú misma lo vas a verificar. Pasa a la pizarra y desarrolla el producto $-4 \cdot 0$ basándote en el mismo procedimiento anterior.

Así lo hizo Marta y terminó feliz al establecer que menos por menos, sí era más.

—Si alguien acotó el profesor—, quiere una explicación más matemática aún, puede desarrollar la siguiente demostración:

Sean a y b dos números positivos cualquiera, obviamente —a y —b serán dos negativos. Comencemos estableciendo que $(-a)\cdot(-b) = x$, aplicando la propiedad aditiva de la igualdad obtenemos que $(-a)(-b) + a(-b) = x + a(-b)$ de donde, por la propiedad distributiva, obtenemos $(-b)[(-a) + a] = x - ab$ lo que igual a $(-b)\cdot 0 = x - ab$, es decir, $0 = x - ab$. De esta expresión se determina que $x = ab$

Al comenzar la demostración dijimos que $(-a)\cdot(-b) = x$, reemplazando en la expresión anterior resulta que $(-a)(-b) = ab$

—¡Excelente demostración! —exclamó Marta.

—Y como algo recreativo que puede servir para que sus alumnos no se olviden ni confundan esta regla, un cuento —propuso Ivo.

Existe una isla que tiene ciudadanos buenos (+) y ciudadanos malos (—). Salir de esa maravillosa isla es malo (—) y entrar a ella es bueno (+), por lo tanto

Si un ciudadano bueno (+) entra (+) es positivo (+) para la isla.

Si un ciudadano malo (—) sale (—) es positivo (+) para la isla.

Si un ciudadano bueno (+) sale (—) es negativo (—) para la isla.

Si un ciudadano malo (—) entra (+) es negativo (—) para la isla.

Allí tienen ustedes la regla de los signos para la multiplicación, espero que toda esta explicación haya contestado tu pregunta —dijo Ivo dirigiéndose a Marta.

Mucho más de lo que esperaba contestó Marta, agradeciendo al profesor su ayuda.

—Sigamos, ¿quién quiere preguntar ahora? —inquirió Ivo.

Hubo un silencio general y parecía que nadie quería reconocer que existían algunas dudas en su quehacer pedagógico. Rocío rompió el silencio.

—En 7º y 8º se trabaja con potencias y aunque sé que en educación media se explica, me gustaría tener claridad con respecto a por qué todo número elevado a 0 es 1, con excepción del 0 elevado a cero ya que en algunas oportunidades me lo han consultado y mi respuesta ha sido que cuando lleguen a la enseñanza media lo sabrán, que es una forma de "sacarme" la pregunta.

—Agradezco tu franqueza Rocío —dijo Ivo— y me alegra que lo consultaras. Es una pregunta recurrente, cuya respuesta acertada, favorece la confianza que los alumnos puedan tener en su profesor.

—Como bien tú decías —continuó Ivo—, generalmente las demostraciones referidas a los teoremas de potencias se concluyen en la media, pero no tiene por qué ser así. Analicemos primero lo siguiente:

El número 4.762 se puede descomponer de la siguiente manera: 4 unidades de mil, más 7 centenas, más 6 decenas, más 2 unidades; que los alumnos dominan muy bien. Escribamos, lo dicho anteriormente de la siguiente manera $4 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 1$ lo que equivale, en potencias de 10, a $4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$. ¿Te fijas que las potencias de 10 van en orden descendente y que en el lugar del 1 se colocó 10^0? Esto permite concluir que $10^0 = 1$. Ese puede ser un primer paso en tu consulta.

—Y una explicación muy simple y entendible —señaló Rocío.

—Ahora, vamos a otra explicación —dijo Ivo—, partamos con 5^0 el cual se puede escribir como 5^{3-3}, o a la resta de dos números iguales que los alumnos quieran, luego le explican que esa expresión se puede escribir como $5^3 : 5^3$, aplicando en forma inversa el teorema de la división de dos potencias y si quieren darles claridad, escríbanselo como $\frac{5^3}{5^3}$ recordando que la división de dos números iguales es 1, o sea, en conclusión $5^0 = 1$.

—Con respecto a 0^0 se dan las siguientes posibilidades. Primero, aplicando el procedimiento recién hecho, obtenemos que es 1, pero si nos basamos en que todo número de base 0, por ejemplo 0^3, 0^7 es cero; el resultado sería 0. Como ven, hay contradicción en los resultados obtenidos; esa es la razón por la que se define $a^0 = 1$ descartando la base 0. Otra consulta, ¡vamos anímense! —exclamó Ivo con mucha vitalidad.

—El cero trajo muchos beneficios a la matemática, pero a la vez muchos problemas —comenzó diciendo Daniel—. Uno de esos, y que me produce dificultades al enseñar, es el número cero factorial. Siempre les digo que su valor es 1 por definición, pero eso jamás me ha dejado conforme, ¿existe otra explicación?

—La expresión 0! aparece cuando se trabaja con combinaciones, por lo que tenemos que explicarlo, basándonos en las propiedades de los números combinatorios —comenzó explicando Ivo—. En primer lugar, sabemos que si se tienen m elementos y se toman de uno en uno, se forman un total de m grupos, esto se escribe como $\binom{m}{1} = m$. Si desarrollamos $\binom{m}{1}$ aplicando la fórmula de números combinatorios, resulta

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1!(m-1)!} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot (m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = m$$

—Por otra parte —prosiguió Ivo— si tenemos m elementos y se toman todos, sólo se puede formar una combinación, o sea $\binom{m}{m} = 1$, que al aplicar la fórmula se llega a que

$\binom{m}{m} = \frac{m!}{m!(m-m)!} = \frac{m!}{m!0!}$ donde aquí aparece el 0! que de acuerdo a la definición de factorial no tiene sentido. Pero vimos que $\binom{m}{m} = 1$, entonces para que la expresión $\frac{m!}{m!0!}$ sea igual a 1, necesariamente 0! debe ser 1. En este momento es que se define, para que la fórmula sea válida para cualquier valor de m y n que 0! = 1.

—Cuando pasé los decimales —dijo Rocío—, una alumna me preguntó por qué en algunos países se utilizaba el punto como separación decimal y en otros la coma. Le respondí que eran acuerdos de cada país, reconozco que fue una respuesta para salir del paso ya que en verdad no lo sabía. Entonces me gustaría saber, ¿por qué en algunos países, coma y en otros, punto?

—El cálculo numérico y su notación ha ido pasando por diversas etapas y en ese recorrido ha habido numerosos cambios que han derivado finalmente en la simbología y forma de operar que usamos actualmente. Para los números decimales ha ocurrido lo mismo y en la antigüedad se han encontrado múltiples formas de representarlos, unos subrayaban la parte decimal, otros la encerraban en un ángulo recto, otros separaban la parte entera de la parte decimal, etc. Pero el primero en usar la coma para separa la parte decimal de la fraccionaria fue Giovanni Magín, alrededor del 1600, que curiosamente no era matemático sino, astrónomo.

Con la invención de los logaritmos —prosiguió Ivo— se generalizó el uso de los decimales y Napier recomendó el uso del punto. Fue un periodo de mucho caos debido a la diversidad de notaciones que se utilizaban, pero al final las que sobrevivieron fueron el punto y la coma. Una solución al conflicto vino por parte de Leibniz, cuando sugirió utilizar el punto como símbolo de la operación multiplicación y descartar el que se utilizaba hasta esa fecha, la x, ya que se confundía con la incógnita. De este modo, la coma se utilizaría para los decimales y el punto para los productos. En Inglaterra no se consideró esta propuesta de Leibniz ya que no era muy bienvenido y se siguió con la simbología que utilizaban, punto para separar decimales y equis para la multiplicación. Posteriormente en Inglaterra se aceptó la utilización del punto. En otros países, como España, se utiliza la coma, pero la escriben en forma elevada, o sea 7’58, por ejemplo.

—Hace dos días —empezó a contar Daniel— desarrollamos con el 4º medio un facsímil de la PSU y había una pregunta a la que no le pudimos encontrar una respuesta correcta —hizo una pausa, mientras buscaba en su maletín, el facsímil.

—Anótalo en la pizarra y veamos de qué se trata —dijo Ivo.

Daniel escribió:

La expresión equivalente a $\sqrt{6+\sqrt{20}}$ es:

A) $\sqrt{6}+\sqrt[4]{20}$

B) $\sqrt{6}+2\sqrt{5}$

C) $\sqrt{5}-1$

D) $1+\sqrt{5}$

E) $\sqrt{8\sqrt{5}}$

—Intentamos —explicó Daniel—, descomponer $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, pero hasta allí llegamos. Me comprometí con mis alumnos a estudiar el problema detenidamente y llevarles la explicación y respuesta la próxima semana, por lo que tu presencia me puede salvar en esta dificultad.

—Conozco este tipo de ejercicios y sé que su desarrollo no es muy común. ¿Era un facsímil oficial? —preguntó Ivo.

—No —respondió Daniel—, Son facsímiles que venden en el comercio.

—Lo suponía, —agregó Ivo—, me extrañó mucho que una pregunta como esta pudiese ser parte de la PSU. De todos modos, te explico cómo desarrollarlo.

—Vamos a hacer equivalentes las siguientes expresiones

$$\sqrt{6+\sqrt{20}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

que es la forma en que queremos que nos quede la respuesta y agreguemos que $\sqrt{6-\sqrt{20}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

Sumamos ambas expresiones y se obtiene

$\sqrt{6+\sqrt{20}} + \sqrt{6-\sqrt{20}} = 2\sqrt{x}$,

despejamos, entonces

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{6+\sqrt{20}} + \sqrt{6-\sqrt{20}}}{2}$$

y elevamos al cuadrado la expresión. Resulta

$$x = \frac{6+\sqrt{20}+2\sqrt{36-20}+6-\sqrt{20}}{4} = \frac{12+2\sqrt{16}}{4} = \frac{20}{4} = 5 \ ,$$

de donde obtenemos que $x = 5$.

—¡Qué bueno el procedimiento! —exclamó Daniel.

Ahora restamos las expresiones iniciales,

$\sqrt{6+\sqrt{20}} - \sqrt{6-\sqrt{20}} = 2\sqrt{y}$

y despejamos $\sqrt{y} = \dfrac{\sqrt{6+\sqrt{20}} - \sqrt{6-\sqrt{20}}}{2}$

y al igual que el proceso anterior, elevamos al cuadrado

$$x = \frac{6+\sqrt{20}-2\sqrt{36-20}+6-\sqrt{20}}{4} = \frac{12-2\sqrt{16}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Entonces reemplazando x e y en el ejercicio dado, obtenemos que

$\sqrt{6+\sqrt{20}} = \sqrt{5} + \sqrt{1} = 1 + \sqrt{5}$ que corresponde a la alternativa C.

—Excelente Ivo, muchas gracias —expresó Daniel.

—Espera... Ahora viene lo mejor —señaló sonriente Ivo y comenzó a escribir sin decir palabras.

$$\sqrt{6+\sqrt{20}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+2\sqrt{5}+5} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = 1+\sqrt{5}$$

—¡Que buena! — exclamó extasiado Daniel.

—Nos queda poco tiempo —intervino Camila en su rol de coordinadora—, así que una última pregunta antes de finalizar la reunión.

—No sé si tendrá mayor trascendencia lo que voy a consultar —señaló Esteban—, pero quiero salir de la duda, ¿cómo debe decirse: matemática o matemáticas?

—La verdad es que se usan ambos términos, pero últimamente se está optando por matemática. No se sabe de dónde viene el término escrito en plural, pero se supone que está basado en establecer la unión de la Aritmética, el Álgebra y la Geometría. También se da como razón para usar sólo matemática, considerando que las demás ramas están incluidas en ella.

—Lo último, señor Matic —dijo Rocío— , la semana pasada un alumno me dijo que había encontrado en Internet la demostración que 0,9999… es igual a 1. Lamentablemente no la guardó y cuando me hizo el comentario tuve que reconocer que no la sabía.

—Lo primero —dijo Ivo—, rescatar que es bueno admitir ante un alumno que uno no es Dios y que simplemente hay cosas que no se saben, eso no los rebaja y si además investigan su consulta y le llevan la respuesta correspondiente, les aseguro que ese alumno apreciará mucho el gesto hecho. Sé que hay varias demostraciones respecto de lo que me preguntas, incluso algunas a nivel superior de cálculo, pero una explicación simple y clara es la siguiente: Supongamos que 0.9999.... < 1, como los números reales son un conjunto Denso, o sea, entre dos números reales siempre hay otro, entonces existe un número x tal que 0.9999.... < x < 1. Como no existe ningún número que cumpla esa desigualdad, se concluye que lo supuesto era falso y en conclusión 0.9999... = 1.

—Esa es una "demostración por el Absurdo" y si no queda lo suficientemente claro, se puede explicar con fracciones del siguiente modo, sabemos que $\frac{1}{3} = 0,3333...$ si multiplicamos $3 \cdot 0,3333...$ resulta 0,9999…, pero si efectuamos el producto $3 \cdot \frac{1}{3}$ éste da 1. En conclusión 0,9999… = 1.

—Le agradecemos al profesor Matic —concluyó Camila— el valioso aporte que nos ha hecho en este día y esperamos que este encuentro se repita en el futuro. Un gran aplauso dio por finalizada la exitosa reunión.

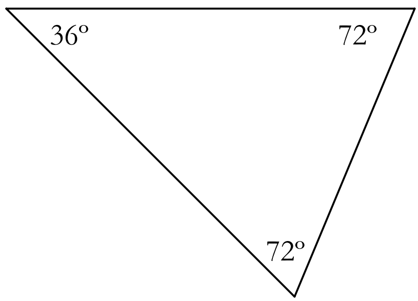
LA DISERTACIÓN DE MARIO

En la clase siguiente, tal como lo había prometido, Daniel llevó lo investigado referente al triángulo dorado.

—La tarea que me dio Álvaro —dijo Daniel, sonriendo—, respecto a la existencia del Triángulo Dorado, fue bastante complicada y me demandó mucho tiempo. La mayoría de la información que encontré tiene que ver con una zona que recibe ese nombre en la que se encuentran las fronteras de Tailandia, Myanmar y Laos, divididas por el río Mekong, y que es un importante centro de tráfico de opio.

—Yo también encontré esa información —señaló Álvaro.

Luego hallé que se llama así, a un circuito turístico en Paraguay. Pero finalmente apareció —dijo Daniel con un suspiro hondo que acompañó su dicho— y puedo confirmarles que existe el triángulo dorado y que corresponde al triángulo cuyos ángulos miden 72º, 72º y 36º.



—¿Y qué relación tiene con el número de oro que vimos la clase pasada? —preguntó Raquel.

—Pues yo me hice la misma pregunta y buscando la información encontré una relación que es de forma trigonométrica y aunque ustedes no han pasado todavía ese contenido voy a anotar la relación para que quede constancia de que existe y que sí lo busqué —dijo entre sonrisas Daniel. Esta es:

$$\frac{c}{d} = \frac{sen72^{o}}{sen36^{o}} = 1{,}618033...$$

Usen sus calculadoras científicas y podrán verificar lo dicho. Si alguien no sabe cómo utilizarla, me pregunta.

—Bien —prosiguió Daniel—, pero hoy tenemos un nuevo objetivo que cumplir: El dibujo a escala.

Mario era un alumno que había vivido gran parte de su vida matemática entre el 3 y el 5. El esfuerzo que colocaba en aprender cada contenido matemático, se veía siempre aplastado por la entrega de una nota que señalaba que su aprendizaje era mínimo y esto con el tiempo lo fue marcando, llegando a ser el "malo para la matemática" de su curso. A pesar de esta pesada carga no podía decir que la asignatura no le gustaba pues había algo de esta que le atraía y seguía con mucho empeño trabajando para superarse.

Cuando Daniel habló de realizar planos en la próxima actividad, a Mario le gustó mucho la idea, ya que su padre era arquitecto y le podría ayudar en lo que tuviera que realizar y hasta quizás podría llegar a obtener una nota sobre 5 en matemática.

—Silencio, por favor. —solicitó Daniel—. Voy dar las instrucciones para que puedan dibujar un plano como corresponde. La idea es realizar un plano de esta sala y llevarlo al papel milimetrado que les solicité ayer y que supongo todos tienen al igual que sus respectivas reglas para medir.

—Si señor —contestaron a coro.

Lo primero que analizaremos es la escala que se va a utilizar para efectuar el dibujo. Para eso es fundamental saber las dimensiones de esta sala.

"Caos organizado" —pensó Daniel— y observó cómo se desempeñaban en esa actividad sus alumnos. Algunos tirados en el suelo midiendo el largo, otros lo hacían siguiendo alguna de las paredes, algunos ingeniosos contaban los pasos desde el pizarrón hasta el mural que estaba en la pared del fondo de la sala y luego medían su paso para sacar el largo total.

Y mientras discutían sobre la verdadera medida del largo y ancho de la sala y de cómo establecer la escala del plano, Daniel se preguntaba por enésima vez si era preferible esa actividad o una gran guía de ejercicios. Bueno, al menos se daba cuenta que no había ninguno que estuviese perdiendo el tiempo y lo que más le gustaba era ver a aquellos alumnos que, reconocían abiertamente "odiar" la matemática, midiendo, sacando cálculos, transformando metros en centímetros y discutiéndoles en algunas oportunidades a los "capos" de la matemática.

La actividad fue muy efectiva y finalizada la hora de clase entregaron a Daniel sus respectivos planos. Con ese cargamento se dirigió a la sala de profesores con la intención de mostrarle a sus colegas, con indiscutible orgullo, lo que habían hecho sus alumnos en clase.

Daniel pensó que esa actividad llegaba hasta allí, pero la clase siguiente se llevó la sorpresa de su vida como profesor. Minutos antes de comenzar la clase, se acercó Mario y le contó que su padre le había comentado sobre algunos errores cometidos en los planos que el curso había realizado y que a él le gustaría aclararlos para que todos aprendiesen a considerar los estándares oficiales para realizar planos. Por lo tanto le pidió unos 15 minutos de tiempo de la clase.

Casi no podía creer que un alumno le pidiese disertar sobre algo que no se le había solicitado y ni siquiera habló de una nota por hacer ese trabajo. Obviamente no se negó y cuando llegó el momento avisó al curso que por unos minutos iban a cambiar de profesor. Todos se miraron con desconcierto. No entendían qué estaba pasando. Daniel le pidió a Mario que pasara adelante, y él se sentó en el puesto del alumno.

Ver a un alumno que hasta el momento había demostrado poca habilidad matemática explicando y siendo el guía de la clase lo llenó de satisfacción y más todavía porque lo que estaba explicando realmente eran situaciones que no se habían considerado, entre ellas, el tipo de línea al hacer un plano, la forma de señalar la altura de los objetos en un plano, los símbolos de la instalación eléctrica, el dibujo de las paredes laterales, etc. y todo con sus respectivos ejemplos y haciendo algunos cálculos decimales que hablaban de tener muy claro lo que estaba haciendo. Los demás alumnos, después de un primer momento de desconcierto, se involucraron en la disertación, preguntando sus dudas y llegó un momento en que la presencia de Daniel pasó desapercibida.

Cuando Mario terminó su disertación se llevó un enorme aplauso de sus compañeros y más cuando Daniel les contó cómo se había gestado su participación. Aunque Mario nunca pidió una recompensa por este trabajo especial, Daniel comunicó a todo el curso que se merecía un 7 al libro y que se lo iba a poner porque consideraba que su trabajo era excepcional. Mario, que estaba acostumbrado a recibir calificaciones bajas, sin creer lo que le estaba sucediendo y en medio de los aplausos de sus compañeros, no pudo contener el llanto. Ahora se sentía capaz de lograr cualquier meta que le propusieran.

Daniel, agradeciendo la brillante presentación, continuó con su clase.

—Con lo visto y realizado en clases, más el valioso aporte de Mario —concluyó—, ya estamos preparados para la siguiente actividad. Elaboren un plano de una de las habitaciones de su casa, ubicando los muebles y principales objetos. No olviden utilizar las características dadas por Mario, para representar cada aspecto.

Desde ese momento, la solicitud de los alumnos para presentar en disertaciones, temas novedosos o profundizar el contenido que se estaba pasando, se convirtió en algo natural.

VIERNES CULTURAL: ARQUÍMEDES Y LAS COMUNICACIONES

—¿Estamos listos? —preguntó Daniel a sus alumnos y alumnas.

—Si señor —respondieron a una voz— Ya podemos comenzar.

La música suave comenzó a llenar el espacio y por el micrófono se escuchó la dulce, pero imponente voz de Mónica.

—Bienvenidos queridos padres y apoderados a nuestro primer "Viernes Cultural", evento que se realizará periódicamente el primer viernes de cada mes a las 19:00 horas. Hoy, tal como estaba anunciado, les corresponde, a los alumnos del tercer año medio, exponer el tema "Arquímedes y las comunicaciones". Iniciará esta actividad el alumno Javier Cifuentes, quien nos relatará algunos aspectos históricos relacionados con el tema.

Los espectadores se sorprendieron cuando las luces se apagaron y algunos focos multicolores, más un efecto de humo blanco cubrieron el escenario y apareció Javier disfrazado de Arquímedes.

—Me llamo Arquímedes y nací el año 287 antes de Cristo —inició Javier su presentación—. Soy hijo de un astrónomo llamado Fidias y pariente del rey Hierón II, y a pesar de haber podido acceder a elevados y codiciados puestos, preferí consagrarme al estudio de las matemáticas bajo la dirección de Euclides en Alejandría. Recuerdo que de muy joven recibí las felicitaciones por mis trabajos técnicos donde sorprendí a todos efectuando la desecación de los pantanos de Egipto, considerada hasta entonces como irrealizable y lo único que tuve que hacer, fue emplear diques móviles. ¿Ingenioso no? Ya en Siracusa, proseguí mis estudios de geometría y mecánica, logrando descubrir principios que modestamente, me han inmortalizado.

Sé que entre ustedes es famoso mi grito de ¡Eureka! ¡Eureka! ¡Lo encontré! ¡Lo encontré! Y la verdad es que no pude controlarme.

Todavía siento vergüenza cuando me recuerdo saltando de la bañera y corriendo desnudo por las calles de Siracusa para contarle mi descubrimiento al rey. En otra oportunidad vendré a contarles esa historia con todos sus detalles y sobre otros inventos, como las catapultas, el tornillo sin fin y muchas fórmulas matemáticas.

Durante la segunda guerra púnica —siguió Javier su representación— Siracusa, aliada de Cartago, fue sitiada por los romanos, por lo que tuve que crear un invento que puso en jaque a su ejército. Con grandes espejos curvos concentré los rayos solares y logré incendiar las naves de los enemigos. ¡Cómo gozaba la gente a mi alrededor, viendo como el fuego consumía las naves romanas! Claro que después se fueron todos a festejar y los romanos aprovecharon esto para penetrar en la ciudad

Yo sabía, por algunos comentarios que me habían llegado, que el general invasor Marcelo, me tenía profunda admiración —prosiguió Javier— y que había ordenado a sus soldados que respetaran mi vida. Por eso cuando entró el ejército vencedor, yo estaba en mi jardín, sumido, con profunda atención en unos problemas de geometría. Escuché que varios soldados romanos penetraron al jardín, mientras yo me encontraba inclinado, trabajando en las figuras geométricas que había trazado sobre la arena, pero no quise distraerme. Estaba en la mitad de una demostración y no quería ser molestado e hice un gesto con la mano a uno de los soldados romanos diciéndole: "No borren mis cálculos", creo que no sabían quién era yo. Sentí un fuego abrasador —Javier hizo una gran pausa, suspiró y pinchó la bolsa con pintura roja que llevaba oculta— y comprendí que una lanza estaba atravesando mis entrañas, sólo pude pensar, mientras se consumía mi vida… "¿Por qué? ¿Por qué? ¿Por qué…?"

Javier, tras su último grito desgarrador, se arrodilló mientras la "sangre" manchaba su blanca túnica, después de unos segundos se desplomó sobre el escenario. Un gran aplauso premió su actuación y la forma original de presentar al personaje.

La función continuó con una explicación más científica y detallada sobre los espejos que utilizó Arquímedes y la forma en que logró incendiar las naves romanas, a cargo de Rosa.

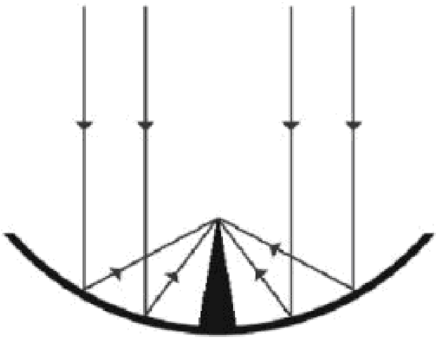
—¿Cuál era el descubrimiento de Arquímedes que le permitió construir unos espejos para combatir a los romanos? —inició diciendo Rosa—. Ustedes a lo mejor se imaginan los espejos de la forma común y corriente que hoy conocemos, pero no es así.

Allí comenzó a funcionar el proyector multimedia, apoyando lo que Rosa explicaba a los padres, apoderados y alumnos asistentes.

—Como ustedes pueden ver en las imágenes —señaló Rosa— los espejos eran cóncavos, y hay una razón para ello. Arquímedes sabía que si los rayos del sol incidían paralelos al eje de un espejo parabólico, éstos se reflejaban y convergían en un solo punto. Por esta razón se alcanzan en dicho punto elevadas temperaturas, las que permitieron incendiar las naves atacantes.

Lo descubierto por Arquímedes —prosiguió Rosa— no es sólo aplicable a esa particular situación, de allí se llevó a múltiples elementos que hoy en día nos hacen más fácil y placentera la vida. En nuestra clase de matemática hemos tenido que estudiar la parábola y sus propiedades. Y lo primero que hizo nuestro profesor fue invitarnos a salir, pero no a un paseo cualquiera, fuimos a visitar una central de comunicaciones la que tiene enormes radares y antenas. Allí nos explicó que la forma que tienen estas, no es obra de la casualidad o por un mero capricho, sino que son el producto de la rotación de una parábola alrededor de su eje de simetría, como muestra la imagen, generando una superficie de revolución llamada Paraboloide. Nos mostró lo que llaman Foco y aprovechamos de pedir algunos folletos para agregar esa información a nuestros cuadernos.

Así supimos que si una parábola recibe una señal, de manera que los rayos incidentes son paralelos al eje de la parábola, entonces la señal se concentra en el foco y a la vez, una señal localizada en el foco de una parábola será trasmitida a lo largo de una recta paralela al eje. Así es como recibimos las señales que nos permiten ver televisión.



—Por lo tanto —finalizó Rosa—, ahora cuando se vayan a sus casas se irán agradecidos de Arquímedes, de su gran aporte a la humanidad. Y antes de subirse a su auto, miren sus focos, son parabólicos. Cuando lleguen a su casa y enciendan las luces, miren las ampolletas, son parabólicas. Si tienen necesidad de encender una linterna, obsérvenla, es parabólica. Por último, enciendan la tele coloquen su programa favorito y no olviden de decir: "gracias Arquímedes".

Un nuevo aplauso coronó con éxito la presentación de Rosa.

—Para finalizar nuestra jornada la cual hemos llamado "Viernes Cultural", nuestro compañero Ramón Pardo, nos explicará sobre "La función cuadrática en la vida cotidiana" —anunció Mónica.

—El gran problema de las matemáticas escolares —comenzó diciendo Ramón— siempre ha sido su gran distanciamiento con la vida cotidiana. Ese motivo es el que nos ha llevado a realizar este ciclo de jornadas. Y todos los cálculos que se realizan en la clase tienen más sentido cuando se sabe que la función cuadrática que estamos estudiando tiene que ver, por ejemplo, con la trayectoria de una pelota lanzada a un aro de básquetbol, con la trayectoria que describe un río al caer desde lo alto de una montaña, con la forma que toma una cuerda floja sobre la cual se desplaza un equilibrista, con el recorrido desde el origen, con respecto al tiempo transcurrido, cuando una partícula es lanzada con una velocidad inicial.

Tiene más sentido resolver ecuaciones de segundo grado en clases cuando sabes que se aplica en la ingeniería civil para resolver problemas específicos en la construcción de puentes colgantes que se encuentran suspendidos en uno de los cables amarrados a dos torres.

Y que los biólogos utilizan las funciones cuadráticas para estudiar los efectos nutricionales de los organismos.

La función cuadrática responde a la formula $y = ax^2 + bx + c$ con a distinto de cero. Su gráfica —como pueden ver en esta diapositiva— es una curva llamada parábola cuyas características son: Si a es mayor que 0 es cóncava y admite un mínimo. Si a es menor que 0 es convexa y admite un máximo.

—Y para ser más preciso y que ustedes entiendan a lo que me refiero voy a darles a conocer un problema que resolvimos hace unos días. Dice así:

Se va a organizar un concierto de música y se espera que asistan 25.000 personas. Se piensa cobrar una entrada de $15.000. Los organizadores saben, por experiencias anteriores, que por cada $1.000 que se aumente el valor de la entrada, la asistencia disminuye en 500 personas. Sobre la base de los datos dados debemos determinar una expresión que represente los ingresos de los organizadores y responder hasta dónde pueden los organizadores subir el valor de la entrada para asegurar ingresos y también qué precio le da los mejores ingresos. Y no sólo esto, pues si se quieren tener ingresos superiores a 450 millones, debemos determinar cuál debe ser el precio de las entradas.

—Eso sería todo —finalizó Ramón—, espero que ahora tengan claridad con respecto a lo que se hace en el colegio y su implicancia en la vida cotidiana.

Entre aplausos, Mónica tomó el micrófono y despidió a los invitados, mientras por los parlantes se escuchaba una agradable melodía.

—A la salida se le entregarán unos apuntes con el tema de hoy —comunicó Mónica— y, una hoja donde podrán expresar su opinión de la actividad y escribir sugerencias. Muchas gracias por su asistencia.

¿CÓMO SE LO DIGO?

—Ayer —comenzó contando Camila a Daniel— tuve que hacer una clase a un sobrino que tiene algunos problemas en matemática. Está pasando inecuaciones y quedó más o menos claro con la materia, pero me encontré con una situación que no quise comentársela y que quería conversarla contigo primero.

—Dime de qué se trata —dijo Daniel y se acomodó para escuchar atentamente.

—Cuando revisé su cuaderno me di cuenta que había un ejercicio resuelto en forma incorrecta. No me llamó tanto la atención pues pensé que él lo había hecho mal o copiado mal, pero al seguir revisando me percaté que todos los de ese tipo tenían el mismo error. Le pregunté a mi sobrino y me dijo que los había copiado tal cual desde la pizarra.

—Veamos —dijo Daniel—. Anota uno de esos ejercicios y desarrollémoslo.

Camila anotó la inecuación $\dfrac{x-2}{x+3} < \dfrac{x+1}{x}$ en la pizarra que usaban habitualmente en sus reuniones y entre ambos fueron completando el desarrollo. Camila anotó:

$$\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+3} - \frac{x+1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)-(x+1)(x+3)}{x(x+3)} < 0$$

$$\frac{x^2-2x-x^2-4x-3}{x(x+3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-6x-3}{x(x+3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3(2x+1)}{x(x+3)} < 0$$

$$\frac{3(2x+1)}{x(x+3)} > 0$$

—Luego, los puntos críticos, considerando 2x+1=0; x+3=0 y x=0, son

$-\frac{1}{2}$; 0 y -3 —señaló Daniel—. Déjame elaborar la tabla.

Hizo un rayado perfecto, dado por los años de experiencia, y completó:

	$x<-3$	$-3<x<-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<0$	$x>0$
$3(2x+1)$	—	—	+	+
$x(x+3)$	+	—	—	+
$\frac{3(2x+1)}{x(x+3)}$	—	+	—	+

—Los intervalos donde el cociente es positivo son (—3, $-\frac{1}{2}$) y (0, +∞) —dijo Daniel.

—Exactamente —apoyó Camila— por lo tanto la solución de este ejercicio corresponde a (—3, $-\frac{1}{2}$) ∪ (0, +∞)

—¿Y dónde está el error que encontraste en el cuaderno de tu sobrino? —inquirió Daniel.

—El procedimiento que efectuaban era el incorrecto ya que trataban la inecuación del mismo modo que una ecuación, o sea, sacaban el mínimo común múltiplo y luego desarrollaban del siguiente modo:

$$\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x}$$

$$x(x-2) < (x+1)(x+3)$$

$$x^2 - 2x < x^2 + 4x + 3$$

$$-6x > -3$$

$$x > -\frac{1}{2}$$

—Por lo tanto obtenían como solución $(-\frac{1}{2}, \infty)$ lo cual es incorrecto —concluyó Camila.

—Ahora entiendo tu preocupación —señaló Daniel, tomando una actitud pensativa que también expresaba inquietud.

—¿Qué hago ahora? —preguntó— ya que no quiero que mi sobrino se entere del error y tenga desconfianza de su profesora. Y para mí también es problemático decirle a una colega que está equivocada en lo que enseña.

—Yo creo que no se puede dejar pasar ese error, por lo que es conveniente que hables con ella y le expliques cuál es la equivocación que se comete. Lleva algún libro que apoye lo que vas a plantearle y préstaselos si ella lo considera necesario. Estoy seguro que va a agradecer tu gesto y ella misma deberá aclarar la situación frente a sus alumnos. Por cierto, eso será mucho mejor que en algún momento un alumno, delante de toda la clase le diga que ha cometido un error y la situación la tome de sorpresa.

—Bueno Daniel, seguiré tu consejo. Espero que mi colega lo entienda.

FUNCIÓN COMERCIAL Y GEOMÉTRICA

—Para trabajar con la función afín, ya tenemos como base lo visto en primero medio sobre proporcionalidad directa —dijo Daniel.

—Exactamente —apoyó Camila—. Ahora sólo se trata de extender ese modelo a la función y=mx+n.

—Lo fundamental va a ser apoyarnos en el análisis de situaciones reales de la naturaleza, la tecnología, de la vida cotidiana, etc. Construir modelos, darles una forma algebraica, expresarlos en tablas de valores y luego representarlas.

—Y tenemos que lograr que nuestros alumnos logren distinguir entre el modelo y las situaciones que este permite analizar, sus ajustes y restricciones.

—Inventemos una situación problemática que nos sirva de partida para el tema —propuso Daniel.

Y durante un rato, intercambiaron ideas sobre el problema hasta que finalmente lo tuvieron listo.

—Léelo para ver cómo quedó —dijo Camila.

—En una empresa de ventas de servicios, los empleados tienen un sueldo que depende de las ventas del mes, más un sueldo base de $150.000. La funcionaria Eliana Ávila, hizo en ventas el primer mes, $800.000 y su sueldo fue $250.000. El segundo mes vendió $1.200.000, recibiendo un sueldo de $300.000.

¿Cuánto será el sueldo del presente mes si estima hacer en ventas $1.600.000?

Determina la ecuación de la recta que describe el sueldo de Eliana.

Determina la pendiente de esta ecuación.

Grafica esta función.

Hacer una estimación para el caso en que a Eliana le fuera muy bien y vendiera $2.500.000

¿Cuánto tendría que vender para obtener un sueldo de $500.000?

Crea un nuevo ejercicio que se pueda representar de modo similar.

—Quedó súper bien —dijo Camila.

—Inventemos otros —dijo Daniel— ya me entusiasmé.

Al rato después ya tenían varios problemas creados.

—En mis apuntes encontré uno de geometría que podemos aplicar también —dijo Camila—, escucha:

Un sitio tiene un perímetro de 56 metros. Calcular la medida de uno de sus lados en función del otro.

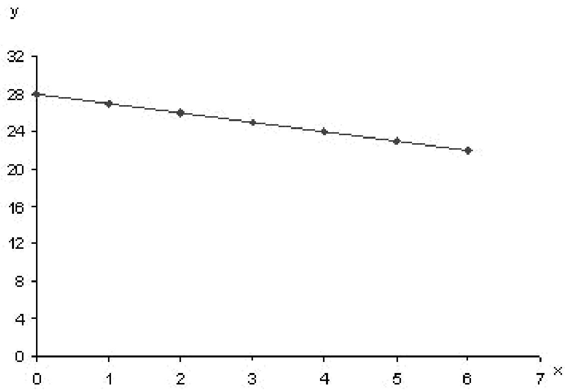
—Desarrollémoslo —sugirió Daniel.

—Bueno, primero tabulemos la situación en una tabla de doble entrada, considerando como x e y la medida de sus lados.

x (m)	y (m)
1	27
2	26
3	25
4	24
5	23
6	22
7	21

—Modelando la situación obtenemos y = f(x) =—x + 28

—Represéntamelos ahora —dijo Daniel.



—Hay varias situaciones que podemos conversar en clases sobre la recta obtenida —señaló Camila—, como la intersección con el eje y el ángulo obtuso que forma respecto al eje x, que no pasa por el origen.

—Y es el momento para formalizar el tema —agregó Daniel—, señalando que las situaciones vistas se pueden modelar con una ecuación de la forma y=mx+n, con m y n distintos de cero, en la cual "y" está en función de x que denotamos y=f(x), reciben el nombre de Función Afín.

—Aclarando que no estamos considerando el caso en que la recta es paralela a uno de los ejes coordenados y tampoco la que pasa por el origen. Y que esos se van a estudiar a continuación —dijo Camila.

—Correcto —respondió Daniel— y para el caso de la función constante, démosle el problema de un automóvil que sube una cuesta por un camino sinuoso con una rapidez constante de 50 km/hr, cuyo modelo algebraico es y=50.

—Para que lleguen a la función lineal, podemos darle una actividad en que tengan que ver con el cambio de monedas, por ejemplo de pesos a dólares o viceversa —finalizó diciendo Camila.

NO CONFUNDIR

—Oye Camila, ¿te fijaste en el programa de 1º medio que nuevamente hay que pasar proporciones y porcentaje?

—Daniel, creo que estás equivocado. Yo revisé el programa completo y eso no aparece.

—Mira, aquí está —dijo Daniel y le mostró el programa— primera unidad "Números y Proporcionalidad".

—Sí, de acuerdo con lo que me muestras, pero no lo estás interpretando como el programa lo sugiere.

—¿A qué te refieres? —interrogó Daniel.

—La idea es, que los alumnos y alumnas hagan análisis y describan fenómenos y situaciones que ilustren la idea de variabilidad.

—Y también hay que pasar porcentajes nuevamente —insistió Daniel.

—Sí, pero dándole un nuevo enfoque. No se trata de repetir lo que ya se vio en la educación básica, aunque puedes iniciar la unidad con un breve repaso, la idea es trabajar con lecturas e interpretaciones de información científica que involucren los porcentajes.

—Ya te estoy entendiendo la idea —expresó Daniel más convencido.

—Debemos efectuar análisis de indicadores económicos y sociales —continuó Camila—. También, planteamientos de problemas que involucren proporciones directas e inversas, pero basados en nuestra realidad cotidiana.

—Entonces, voy a tener que volver planificar ese tema —concluyó Daniel—. Yo había tomado para mis clases lo visto en básica y sólo le había agregado unos ejercicios un poco más profundos y creí que ya estaba listo.

—Planifiquemos juntos la metodología y el enfoque que le vamos a dar a estas unidades. Creo que va a ser mucho más fácil de esa manera.

—Tienes toda la razón —aprobó Daniel—, como tengo libre la próxima hora, voy a conectarme a Internet para sacar todo el material que nos pueda servir de acuerdo a lo que me planteaste respecto de estos temas.

—De acuerdo —respondió Camila—. Yo tengo varios textos que nos pueden ayudar. Nos juntamos a las tres entonces.

—Sí, a las tres está bien —le confirmó Daniel.

Aquella tarde Camila llegó cargada de libros y carpetas con diversos apuntes respecto del tema que iban a planificar. Daniel también llegó con una gran cantidad de hojas impresas y algunos libros.

—Veo que también trajiste algunos libros —le comentó Camila.

—Sí, pero tienen sus años así que no sé si nos servirán —dijo Daniel.

—Pero no veo "el Baldor" —dijo Camila sonriendo maliciosamente.

—No me vas a creer, pero lo tomé varias veces con la intención de traerlo. Al final lo dejé, con el dolor de mi alma.

Se rieron de sus bromas y se dispusieron a trabajar.

—Bien, ¿cómo comenzamos? —preguntó Camila.

—De acuerdo a lo que leí recién en el programa, lo primero es aclarar lo que significa una variable —mientras indicaba la página donde aparecía la información.

—Eso es correcto, —confirmó Camila—, pero ellos tienen que llegar a concluirlo. Podemos darle una lista de enunciados y que determinen si son o no variables, basándose en cómo interpretan ellos el significado de variable.

—Podría ser, por ejemplo, el precio del dólar —sugirió Daniel—, el tiempo de duración de una canción, el valor de la UF, número de alumnos de nuestro colegio, etc.

—Me parece bien —aprobó Camila—. Les damos unas 10 frases y los ponemos a discutirlas. Eso les dará claridad sobre lo que es una variable.

—¿Qué viene después? —preguntó Daniel.

—Podemos establecer algunas comparaciones entre magnitudes y que establezcan las diversas formas de comparar que existen.

—Tú dices —quiso aclarar Daniel— darles actividades para comparar por igualdad, por diferencia, por orden y por cociente.

—Sí —respondió Camila— y que nuestro tema tiene que ver con la comparación por cociente. Al decir que la cantidad de puntos que lleva la UC y el Colo Colo son distintos, estoy comparando por igualdad y que si digo que la UC tiene 3 puntos más que el Colo Colo la comparación es por diferencia.

Y que la UC va primera y el Colo Colo tercero es por orden —siguió el ejemplo Camila— y que sus puntajes están en razón 4:3 la comparación por cociente.

—Con esa explicación —dijo Daniel—, podemos llegar a analizar que también hay comparaciones entre razones de donde resultan igualdades llamadas proporciones.

—Y por consiguiente —apoyó Camila—, hacer un rápido repaso recordándoles los términos de una proporción y la propiedad fundamental y desarrollando algunos ejercicios. Con eso ya podemos ingresar a la presentación de información a través de tablas y gráficos; podemos mostrarles gráficos con algunas interrogantes y que ellos saquen sus respectivas conclusiones; preguntarles, por ejemplo, a qué hora se registró la mínima y la máxima temperatura, entre qué horas estuvo bajo cero, etc. O exponerles otro que muestre, por ejemplo, el rendimiento de tres atletas corriendo 1.000 metros planos. Y pedirles que determinen en qué momento van empate, en qué orden llegaron a la meta, etcétera.

—Excelente —apoyó Daniel—. Y de allí pasamos al siguiente tema. Podemos darle unas tablas para completar y que sobre la base de ellas, determinen cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales y que luego establezcan la constante de proporcionalidad.

—Eso es —aprobó Camila— que lleguen a que $\frac{a}{b} = k$ donde k es la constante. Y el mismo camino podemos tomar para que verifiquen la proporcionalidad inversa, y lleguen a que $a \cdot b = k$

—Sí, pero cada uno de ellos con su gráfico respectivo, ¿no te parece?

—Tienes toda la razón —reconoció Camila—. Y posteriormente a esto, darles una guía de trabajo para afianzar lo aprendido.

—Ahora sí estoy claro —señaló Daniel— y ya sé que para la variación porcentual tengo que hacer un procedimiento parecido a este.

—Fue bueno haberlo conversado, sino hubiésemos hecho cosas distintas en un mismo nivel, por haber interpretado diferente lo que el programa indica.

—Te confieso que antes no me gustaba para nada trabajar en equipo con otros colegas —reconoció valientemente Daniel—, pero ahora estoy viendo el beneficio que trae. Creo que he perdido mucho crecimiento pedagógico por ser un lobo solitario.

—¡Que conste que tú lo estás diciendo! —exclamó Camila riendo—, no yo.

¡TAXI!

—Buenos días —saludó sonriente Daniel.

—Buenos días, señor —contestaron todos.

—Que viene contento, profe —señaló Romina.

—Como siempre, pero en realidad, hoy mucho más. Me acaban de informar que algunos de nuestros alumnos clasificaron para la Olimpiada Interfronteras de Matemática y ese es un buen premio al esfuerzo que hemos hecho en conjunto.

—¡Felicitaciones, Bravo! profe —manifestaron con alegría los alumnos.

—Muchas gracias —dijo Daniel—, ahora comencemos nuestra labor.

—Supongo que ustedes alguna vez han viajado en taxi. ¿Cierto?

—Yo varias veces —señaló Maribel— ya que acompaño a mi abuelita cuando tiene que ir al hospital, a la AFP o a su Isapre.

—Pues cada vez que ustedes realizan un viaje en taxi y deben cancelar la carrera, se está aplicando una famosa función matemática —explicó Daniel.

—¿En serio profe? —preguntó incrédula Pamela.

—Así es —le confirmó Daniel— y lo vamos a probar en la siguiente actividad.

Mientras Daniel hablaba de la situación problemática iba anotando los datos en la pizarra.

—Supongamos que Mario tiene un taxi cuya caída de bandera es de \$200 y \$70 por cada 200 metros y que Álvaro maneja otro taxi cuya caída de bandera es de \$300 y \$60 por cada 200 metros. ¿Cuál de los taxis conviene para una carrera de 4 Km?

Todos comenzaron a realizar sus cálculos, mientras Daniel recorría la sala para ver la forma en que enfrentaban el problema.

—Sale muy largo —se quejó Raquel—, pero no es difícil.

—En general —preguntó Daniel una vez que finalizaron sus procedimientos —, ¿a partir de qué distancia, un taxi es más conveniente que el otro?

—Al principio el más barato era el que cobraba $70 cada 200 metros, pero a medida que se iba avanzando en metros, la cantidad de dinero a pagar se iba igualando —respondió Raquel—. Cuando se llega a los 2.000 metros sale lo mismo para los dos taxis, de allí en adelante es más barato el que cobra $60 cada 200 metros.

—Grafiquemos la situación planteada y veamos si en forma gráfica podemos evitar el largo procedimiento del que se quejaba Raquel. Además que sabremos qué tipo de gráfico se obtiene en estos problemas.

Unos minutos después todos tenían su gráfico hecho.

—El gráfico que acabamos de hacer corresponde a la llamada Función Parte Entera de x —explicó Daniel— que asocia a x el mayor entero que es menor o igual a x y se simboliza como y = [x].

—¿Qué pueden decir sobre los puntos inicial y final de cada tramo? —preguntó Daniel.

—Que cuando llega al punto final de un tramo "pega un salto" y pasa al siguiente tramo —respondió Mario.

—En realidad, no alcanza a llegar al final —opinó Sofía— se aproxima a él, pero sin llegar a alcanzarlo.

—Muy bien. Les coloco una nueva situación, para que vean la gran aplicación que tiene la matemática en nuestra vida cotidiana. El remedio llamado Paracetamol infantil en gotas, es un analgésico y antipirético que recetan los médicos para bajar la fiebre y calmar los dolores en los niños. La cantidad de medicamento a administrar es de 2 gotitas de Paracetamol por cada 1 kg de peso del niño. Construyan una tabla de valores, considerando los siguientes pesos en gramos: 2.500, 3.500,4.500, 5.000, 6.500, 7.000, 8.500 y 9.000.

Daniel esperó que todos completaran la tabla y preguntó:

—¿Cuál es el modelo algebraico asociado a la situación planteada?

—Es $f(x) = y = 2 \cdot [x]$ —respondió Sofía

—Muy bien —le respondió Daniel—. ¿Y en qué otra situación de la vida cotidiana ven ustedes que se puede aplicar la función parte entera?

Se dispusieron a pensarlo, cuando de pronto Maribel rompió el silencio diciendo con su entusiasmada respuesta: —¡En los planes de celulares, profe!

—Excelente —dijo Daniel y agregó— con respecto a lo que dijo Maribel, quiero que para la próxima clase traigan algunos de los planes que tienen las empresas telefónicas con el fin de analizarlos y determinar los más convenientes.

—Profe, podríamos analizar especialmente lo que se refiere a Internet, porque allí hay bastantes planes que se ofrecen y uno no sabe al final cuál es el más conveniente.

—Perfecto, que esa sea nuestra actividad de la próxima clase —señaló Daniel.

—Para finalizar el trabajo de hoy, iremos a la sala de computación y en parejas van a graficar las siguientes expresiones —y anotó en la pizarra:

1) $y = [2x]$ para —4 < x < 4

2) $y = \dfrac{x}{[x]}$ para el intervalo [1,6]

3) $y = x - [x]$

4) $y = \left[\dfrac{x}{2}\right]$

5) $y = \dfrac{[x]}{2}$

—Analícenlas, establezcan similitudes, diferencias y determinen su dominio y recorrido —concluyó Daniel.

ESTADÍSTICA EN LA PSU

—Hoy vamos a aplicar los contenidos de estadística que han aprendido en algo que les interesa mucho, por estar en 4º medio: la Prueba de Selección Universitaria, es decir, la PSU.

Daniel hizo una pausa, mientras los alumnos hacían un completo silencio por el interés del tema.

—Seguramente —prosiguió Daniel—, en algún momento, ustedes se han preguntado cómo se determinan los puntajes que indican quiénes pueden entrar a alguna carrera de la educación superior y quiénes no. Hoy aprenderemos sobre esto. El Consejo de Rectores acordó que, a partir del Proceso de Admisión 2005, todas las pruebas de la batería deben normalizarse; esto quiere decir que la distribución original se transformará a una distribución Normal. La escala de puntaje estándar que se utilizará será con un promedio 500 y desviación estándar 110.

—Señor, ¿la prueba tiene un máximo de puntaje? —consultó Héctor.

—No sólo un máximo —respondió Daniel—. Los puntajes extremos se fijan en 150 puntos y 850 puntos. Es muy importante que ustedes tengan claridad en el procedimiento que se efectúa para obtener el Puntaje Corregido —continuó Daniel—. Éste corresponde al número de respuestas correctas menos un cuarto del número de respuestas incorrectas. Sé que va a quedar mucho más claro con un ejemplo.

Se acercó a la pizarra y comenzó a escribir el procedimiento, mientras explicaba.

—Supongamos que un alumno obtiene 50 respuestas correctas y 18 incorrectas. Su puntaje corregido será $50-\frac{1}{4}\cdot 18$ es decir $50-4{,}5$. Aquí sucede algo importante que deben conocer; si la fracción decimal obtenida es igual a 0,75 debe aproximarse al entero superior, pero si la fracción es igual a 0,25 ó 0,5 debe aproximarse al entero inferior. Por lo tanto, el puntaje corregido de nuestro ejemplo será 50 — 4 = 46.

—Señor, jamás nos habían informado sobre la forma en que se considera esa parte decimal —señaló Ignacio.

—Entonces, los puntajes que hemos sacado en los ensayos que hemos hecho hasta ahora, no eran correctos — agregó Héctor.

—La variación no es mucha, pero ustedes deben tener esta información y para eso estamos —respondió Daniel, siguiendo con su exposición—. Una vez obtenidos los puntajes corregidos para todas las personas que rindieron la prueba, se crea una tabla de frecuencias, como ésta:

Puntaje Corregido	Frecuencia
-9	1
-7	2
-6	2
-5	6
-4	7
-3	13
-2	19
-1	35
0	49
1	88
2	107
3	154
…	…
68	1

—Con los datos de esta tabla —continuó Daniel—, se calculan el promedio y la desviación estándar. Ya saben ustedes que el promedio corresponde al cociente entre la suma de los puntajes corregidos y la cantidad de pruebas realizadas. Establezcamos que esta resultó de 22 puntos. Obtengamos ahora la frecuencia relativa, que corresponde a la proporción de personas que obtuvieron cierto puntaje corregido.

Puntaje Corregido	Frecuencia	Frecuencia Relativa
-9	1	0
-7	2	0,0001
-6	2	0,0001
-5	6	0,0002
-4	7	0,0002
-3	13	0,0003
-2	19	0,0005
-1	35	0,0009
0	49	0,0013
1	88	0,0023
2	107	0,0028
3	154	0,004
…		
68	1	0

—Agreguemos, a la tabla anterior, la frecuencia acumulada relativa. Boris, ¿cómo se completa la tabla? —preguntó Daniel.

—Sólo tengo que ir sumado los valores obtenidos en la frecuencia relativa —señaló Boris.

Puntaje Corregido	Frecuencia	Frecuencia Relativa	Frecuencia Relativa Acumulada
-9	1	0	0
-7	2	0,0001	0,0001
-6	2	0,0001	0,0002
-5	6	0,0002	0,0004
-4	7	0,0002	0,0006
-3	13	0,0003	0,0009
-2	19	0,0005	0,0014
-1	35	0,0009	0,0023
0	49	0,0013	0,0036
1	88	0,0023	0,0059
2	107	0,0028	0,0087
3	154	0,004	0,00127
…			
68	1	0	1

—Gracias Boris. Ahora que ya obtuvimos los puntajes corregidos y la frecuencia relativa acumulada, procedemos a calcular el puntaje z, que le correspondería en una curva normal a esa proporción de área de la curva original. Es decir, para un puntaje corregido en particular, su puntaje z asociado nos indica a cuántas unidades de desviación estándar del promedio se encuentra un puntaje determinado; por ejemplo, el valor z = 0,7 significa 0,7 desviaciones hacia la derecha del promedio; el promedio z =-1,2 implica 1,2 desviaciones hacia la izquierda del promedio; y si z = 0 no hay desviación y corresponde al promedio. El puntaje z resulta de aplicar la función inversa de la normal a la frecuencia relativa acumulada. En otras palabras, usando una tabla especial, se busca en el cuerpo de ella un valor dado de Frecuencia Relativa Acumulada, y que valor de z le corresponde. Por ejemplo, para el caso de un puntaje corregido que tenga una frecuencia relativa acumulada de 0,67 el puntaje z asociado es de 0,44.

—¿Cómo se hace para llegar a ese valor? —consultó Diana.

—En la tabla de puntajes z —respondió Daniel—, se busca la frecuencia relativa acumulada de 0,67 y se ve con qué par de valores está asociado; estos valores se suman, en este caso 0,4 + 0,04 lo que da 0,44. Y ahora —prosiguió Daniel—, con los puntajes z correspondientes a cada puntaje corregido, se procede a calcular el puntaje estándar por la expresión 500 + 110·Z, donde 500 corresponde a la media y 110 a la desviación estándar.

—Los puntajes normalizados quedan así:

Puntaje Estándar	Puntaje Z	Porcentaje
< 450	-0,4545	32,47%
< 475	-0,2272	41,02%
< 500	0	50%
> 550	0,4545	32,47%
> 600	0,909	18,16%
> 650	1,3636	8,63%
> 700	1,8181	3,45%

—Los porcentajes se mantienen fijos para cada puntaje z —señaló Daniel— y, por ende, para cada puntaje estándar asociado.

—¿Las notas igual se normalizan? —preguntó Alex.

—Las notas de enseñanza media, para el proceso de admisión 2005, se normalizaron con una media de 540 puntos y desviación estándar de 110 puntos; para el 50% inferior, el cálculo se hizo modificando el puntaje $z \cdot 90$. Esto se debe a que la media considerada el 2005 era de alrededor de 540 puntos.

—Entonces este año, y los años siguientes, esto va a cambiar —concluyó Diego.

—La intención, según señaló el Consejo de Rectores —explicó Daniel—, es ajustar en forma progresiva la transformación de puntaje normalizado hasta poder, en 4 ó 5 años, asignar 500 puntos a la media de las notas de la enseñanza media, con el fin de lograr la equivalencia en la normalización de todos los instrumentos utilizados.

—Significa que para los cursos que vienen detrás, lo situación va a ser más difícil —opinó Emilio.

—Mira Emilio —respondió Daniel—, el que es constante y dedicado en sus estudios, jamás va a tener problemas, aunque se cambien algunas reglas del juego.

—Tiene toda la razón, profe —respondió Emilio.

SIEMPRE POSITIVO

—En las clases anteriores, hemos trabajado con la Función Parte Entera y hemos conocido su aplicación en la vida cotidiana —comenzó diciendo Daniel.

—Así da gusto la matemática —opinó Raquel, en voz alta.

—Tienes toda la razón —contestó Daniel—. Y continuando en esa línea, hoy conoceremos una nueva función y lo haremos en base a la siguiente situación problemática: Una empresa de buses tiene su centro de operaciones en La Serena y desea saber en qué punto de la carretera se encuentran dos de sus buses. Conectándose por radio con ellos, uno de los conductores informa que se encuentra en el kilómetro 769, mientras que el conductor del otro bus comunica que se halla en el kilómetro 379. Sabiendo que La Serena está en el kilómetro 474, ¿a qué distancia se encuentra cada bus de La Serena? ¿Cómo determinar la distancia, en un punto cualquiera, entre uno de los camiones y La Serena?

—Eso es muy fácil señor; basta con restar y listo —señaló Álvaro.

—Los kilómetros son 379, 474 y 769. ¿Qué resta harías? —preguntó Daniel a Álvaro.

—Restaría 474 — 379 y 769 — 474 —respondió Álvaro.

—¿Y cómo haríamos para determinar la distancia entre un punto x cualquiera y La Serena? —volvió a preguntar Daniel.

Se produjo un momento de silencio y luego comenzaron a intercambiar opiniones entre ellos.

—¿Cuál es el problema? —consultó Daniel.

—Es que no sabemos si restar x — 474 ó 474 — x, ya que no sabemos si x es menor o mayor que 474 — respondió Lorena.

—Además que, según se trabaje, daría un resultado negativo y la distancia no puede ser negativa —concluyó Sofía.

—Exactamente —dijo Daniel— y ¿cómo podríamos solucionar esta dificultad?

—No haciéndole caso al signo —dijo Mario, sonriendo.

—Eso no se puede hacer —le contradijo Romina.

—¿Y cómo podríamos definir una función que nos solucione esa dificultad? —preguntó Daniel.

—Yo recuerdo que en séptimo año vimos algo relacionado con lo que se está discutiendo —dijo Esteban.

—Cierto, ahora me acuerdo —dijo Sofía—, sacábamos el valor absoluto de los números. Por ejemplo, el valor absoluto de —7 es 7.

—Bien, hemos llegado al punto que me interesaba —anunció Daniel—. Hoy conocerán la función valor absoluto, que se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

—Eso quiere decir que si queremos determinar $|-3|$, tendríamos que efectuar —(—3) lo que nos da 3 positivo —concluyó Maribel.

—Así es Maribel, pero volvamos al problema inicial —señaló Daniel—. Entonces, para determinar las distancias entre los buses y su centro de operaciones, debemos efectuar $|769-474| = 295$ y $|379-474| = |-95| = 95$.

—Falta determinar la distancia para cualquier punto de la carretera —recordó Raquel.

—¿Y cómo sería eso? —consultó Daniel.

—Pienso que $|x-474|$ —contestó Raquel.

—O también $|474-x|$ —acotó Esteban.

—Está bien. Consideremos la función dada por Raquel y grafiquémosla.

Daniel dio el tiempo necesario para que sus alumnos pudiesen elaborar sus respectivas tablas de valores y graficar la función.

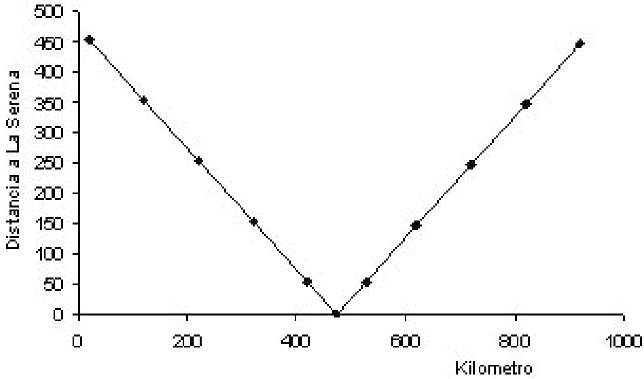
—Mario, pasa y anota la tabla de valores que obtuviste —dijo Daniel.

Con cierta impaciencia, Mario se levantó de su asiento y anotó su tabla en la pizarra.

X	Y
80	394
160	314
320	154
379	95
430	44
474	0
520	46
580	106
640	166
769	295
800	326
860	386

—¿Hago el gráfico también? —preguntó Mario.

—Bueno —respondió Daniel.



—¿Siempre resulta el mismo gráfico? —preguntó Álvaro.

—Eso lo van a concluir ustedes mismos, porque ahora iremos a trabajar a la sala de computación y allí van a dibujar con el Graphmatica las siguientes funciones —dijo Daniel anotando en la pizarra:

$$y = |x|\ ;\quad y = |x+2|\ ;\quad y = |x-2|\ ;\quad y = |x|+2\ ;\quad y = |x|-2\ ;$$
$$y = |-x|$$

—Una vez que terminen con esos gráficos, vamos a extraer las conclusiones correspondientes y les daré un nuevo grupo de funciones para graficar —concluyó Daniel.

Los alumnos se pusieron de pie y todos se dirigieron a la sala de computación.

LA PENA DE LA INJUSTICIA

—Esteban, ¿trajiste preparada tu disertación? —preguntó Daniel.

—Sí señor, cuanto usted diga, paso a exponerla —respondió Esteban.

—Gracias Esteban. Antes, quisiera recordarles cómo surgió esta tarea, especialmente a los que estuvieron ausentes la semana pasada —comentó Daniel. —Esteban, durante la clase anterior, preguntó si existía alguna mujer famosa por sus aportes a la matemática, ya que rara vez se nombra a alguna. Le contesté que sí, y algunas muy famosas, así que le propuse que para esta clase nos presentara una disertación con la vida y obra de alguna de ellas. Esteban, ya puedes pasar —dijo Daniel, tomando asiento en el puesto vacío dejado por el alumno.

—Cuando surgió esta tarea —comenzó Esteban—, debo confesarles que la consideré "una lata", pero después de buscar en Internet y leer las respectivas biografías, mi interés creció. Mi primera idea fue hablar sobre la primera mujer matemática, Hipatía; pero como se trataba, según me dijo el profe, de optar por la que más me llamara la atención, me decidí finalmente por Sophie Germain o Sofía Germain.

—Tiene el mismo nombre que el de mi abuela y el mío —dijo Sofía—, y las dos somos buenas para la matemática.

—Hoy, puedes decir eso abiertamente, Sofía, y a nadie le llamaría la atención —le comentó Esteban—, pero en la época de ella era muy difícil inclinarse por la matemática, ya que las mujeres tenían prohibido estudiarla. Pero no quiero adelantarme; primero, voy a contarles que Marie Sophie Germain nació el día 1 de Abril de 1776, en París. A los 13 años, en plena revolución, se interesó por la lectura, comenzando con las obras de la biblioteca de su padre, que era diputado. Entre esos libros, encontró "Historia de la Matemática" de Jean Baptiste Montuela y en él se contaba la historia de Arquímedes y su muerte, a manos de los soldados romanos, mientras resolvía, pensativo, un problema geométrico. Esta historia la conmovió y quiso conocer esa ciencia que hacía que alguien pudiese abstraerse de manera tal que ni siquiera le preocupara la batalla que se desarrollaba a su alrededor.

Los compañeros de Esteban escuchaban con atención el relato, aunque un poco incrédulos.

—Comenzó a leer todos los textos matemáticos que caían en sus manos —prosiguió Esteban— y cuando sus padres descubrieron su gran pasión trataron por todos los medios de desviarla de ese camino. Incluso con métodos inhumanos, ya que la dejaban en su pieza sin calefacción, sin luz e, incluso, sin ropa, cubierta sólo con una sábana; a pesar de esto, ella siempre se las arreglaba para seguir estudiando. Fue tanta su tenacidad que, finalmente, sus padres cedieron y le permitieron estudiar matemática, siempre y cuando lo mantuviese en secreto.

—Y pensar que ahora los padres nos retan si no estudiamos matemática —dijo Raquel sonriendo.

—Tienes toda la razón —le respondió Esteban—. Cuando se fundó en 1794 la Escuela Politécnica de París, como Sofía no podía ingresar, por ser mujer, comenzó a conseguirse los apuntes con algunos amigos que sabían de su pasión. En esta escuela, al finalizar el período de clases, los estudiantes debían presentar a sus respectivos profesores sus investigaciones realizadas; entonces, Sofía preparó un trabajo y lo firmó como Antoine Auguste Le Blanc. Este trabajo lo leyó Joseph Louis Lagrange, gran matemático de la época, quien por su originalidad quiso conocer al autor.

—¡Qué emocionante! —exclamó Pamela— hasta podría ser tema de una película.

—Ciertamente —apoyó Esteban— y cuando Lagrange supo la verdad la felicitó y le dio la posibilidad de seguir estudiando, acogiéndola como alumna, lo que ayudó a Sofía a acercarse al círculo de científicos y matemáticos que admiraba; pero un nuevo obstáculo se presentó, y es que ella no era aristócrata, por lo cual, también se le negó el derecho al conocimiento. Esto no la hizo desfallecer y continuó sus estudios, inclinándose por la Teoría de Números. Se contactó con Carl Gauss, escribiéndole muchas cartas, pero siempre firmando como Le Blanc, explicándole cómo el famosísimo Último Teorema de Fermat no era resoluble en determinadas condiciones. La respuesta de Gauss fue muy agradable, agradeciendo el esfuerzo y el buen hacer matemático del nuevo erudito. La correspondencia continuó durante algún tiempo, hasta que, en medio de las Guerras Napoleónicas, y temiendo por la seguridad del viejo genio, Sophie se descubrió, al fin, como mujer en una carta. La respuesta de Gauss fue inesperada, ya que reconoció que la vida de Sophie era una proeza en sí misma, al haber superado todos los formidables obstáculos sociales para demostrar su talento. Esta correspondencia con el tiempo desapareció, cuando Gauss dejó sus labores matemáticas tras ser nombrado catedrático de astronomía en Göttingen.

En la sala, salvo por la voz de Esteban, había absoluto silencio.

—Posteriormente —siguió Esteban— sus investigaciones se orientaron a la Teoría de la Elasticidad y en 1816 consiguió el Premio Extraordinario de las Ciencias Matemáticas otorgado por la Academia de Ciencias de París, tras ganar un concurso, lo que la convirtió en la primera mujer que asistió a las sesiones de la Academia Francesa de las Ciencias. El teorema que lleva su nombre, fue el resultado más importante entre 1753 y 1840. En los últimos años de su vida, escribió dos libros matemáticos; uno sobre la curvatura de superficies y otro sobre Teoría de Números. Además, escribió un ensayo sobre filosofía de la ciencia. Sophie murió el 27 de junio de 1831 en París, de cáncer de mama. En el certificado de defunción, a pesar de sus múltiples aportaciones al avance de las matemáticas, figura como "mujer sin oficio".

—¡Qué pena! —reconoció Sofía.

—A pesar de sus logros nunca recibió título alguno. Es más, cuando se erigió la torre Eiffel en 1889 se inscribieron los nombres de 72 sabios franceses que contribuyeron a su existencia, pero no se incluyó a Sophie Germain entre ellos. Lo único que la recuerda como matemática y filósofa es una calle de París, un Liceo que lleva su nombre y una placa en la casa donde murió. Actualmente, como reconocimiento póstumo, el Instituto de Francia, concede anualmente

“Le Prix Sophie Germain” al investigador que haya realizado el trabajo más importante en Matemáticas.

—Quiero agregar —dijo Daniel—, para que ustedes comprendan la importancia de esta matemática, que su contribución al Teorema de Fermat, que restringía de forma considerable las soluciones, sobre la elasticidad de la vibración de las placas, permite la construcción de edificios altos, de tal manera que el movimiento de la tierra no los haga caer.

—Como la torre Eiffel —comentó Romina.

—Y ni siquiera la colocaron en la placa recordatoria, ¡qué injusticia! —señaló Maribel.

—Para finalizar —dijo Esteban— quiero señalar que una de las mayores contribuciones de Sofía a la Teoría de Números fue la demostración matemática de que si x, y, z son enteros y $x^5 + y^5 = z^5$, entonces al menos uno de ellos es divisible por cinco. Ahora voy a desarrollar un problema propuesto por ella, en el que hay que demostrar que los números del tipo $a^4 + 4$ son compuestos, siendo a≠1. Su procedimiento es así —y anotó en la pizarra—:

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 =$$

$$(a^2 + 2)^2 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 =$$

$$(a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a)$$

De esta última expresión se concluye que el número $a^4 + 4$ es un número compuesto ya que puede ser expresado en forma de dos factores que no sean iguales a él ni a la unidad. Eso es todo.

—Excelente Esteban —reconoció Daniel—. Demos un gran aplauso a su compañero por su preocupación y gran exposición. Y para los que quieran seguir investigando sobre las mujeres matemáticas, voy a anotarles un listado de las más importantes de todos los tiempos; ellas son: Teano, Hipatia, Émilie de Châtelet, María Gaetana Agnesi, Carolina Herschel, Mary Somerville, Ada Lovelace, Sofía Sonia Kovalevskaya, Grace Chisholm Young, Emmy Noether, Grace Murray Hopper, Emma Castelnuovo y Edna Paisano.

LENGUAJE ALGEBRAICO CON TORTUGA INCLUIDA

Daniel entró a la sala y lo primero que hizo, después de saludar y pasar la lista, fue escribir en una esquina de la pizarra la expresión $\frac{5x^2-(4x)^3}{3}$ y lanzó el desafío.

—¿Quién quiere leer esta expresión algebraica en lenguaje común?

Todos miraban la expresión y no se atrevían a dar el primer paso, por lo que Daniel los animó a intentarlo.

—Vamos, sin temor, si se equivocan no pasa nada; lo intentan de nuevo y punto. Recuerden lo que siempre les he dicho "Es preferible pensar en forma errónea que no pensar".

Y surgieron las primeras voces.

—"El quíntuplo de un número…"

—No —interrumpió Daniel con una sonrisa.

—"El cuadrado del quíntuplo…"

—No —señaló Daniel con voz amigable.

—"La diferencia del quíntuplo…"

—No.

Y así varios lo intentaron, pero no lograban llegar a la respuesta correcta.

—Les aseguro —dijo Daniel, de manera muy convincente— que al finalizar la clase, todos sabrán leer este tipo de expresiones.

—¿Todos, todos? —preguntó Estefanía.

—Exactamente, y no tengo ninguna duda de ello, pero también necesito la cooperación de todos ustedes, ¿de acuerdo?

—Sí, señor —respondieron todos.

—Lo primero que vamos a hacer es anotar diversas expresiones comunes con su respectiva equivalencia algebraica.

Y Daniel comenzó anotando: sumar, agregar.

—¿Qué otro palabra se les ocurre que tenga el mismo significado algebraico?

—Aumentar —respondió Ángel.

—Añadir —agregó Ester.

Así, fueron construyendo un completo listado, que sería la base para transformar expresiones verbales en algebraicas y viceversa.

—Ahora —dijo Daniel—, vamos a leer algunas expresiones algebraicas hasta poder leer la que anoté inicialmente en la pizarra.

—Señor, hay algo que no me quedó claro en el listado de palabras —señaló Ricardo.

—¿De qué se trata? —preguntó Daniel.

—Cuando usted colocó la palabra exceso, le dio el equivalente a la operación resta y, para mí, exceso significa más, es decir, suma.

—Entiendo tu consulta y voy a responderte con un ejemplo, para mayor claridad. Si yo peso 87 kilos y debería pesar 72 kilos, mi médico me dirá que estoy "excedido" de peso y que deberé bajar 15 kilos para alcanzar mi peso normal. Al hablar de "excedido", me está diciendo que tengo más kilos de lo que debo tener, pero para calcular cuántos kilos son, se debe efectuar la resta 87 — 72, para poder determinar el exceso. Por eso, esta palabra se asocia con la sustracción y no con la suma.

—Gracias profe —dijo Ricardo—; me quedó súper claro.

—Señor. ¿Le puedo hacer una pregunta? Pero que no tiene nada que ver con el tema —dijo María Paz, con voz tímida.

—Dime de qué se trata —la animó Daniel.

—He escuchado varias veces —explicó María Paz— una historia sobre la carrera entre una tortuga y un hombre y que, al final, la tortuga gana, pero no sé de qué se trata ni por qué es tan famoso ese cuento matemático.

—Tú te refieres a la historia en que Aquiles, un héroe griego famoso por su rapidez, compite en una carrera contra una tortuga. Te la voy a explicar para que entiendas por qué es una historia tan popular. Supongamos que la distancia a recorrer es de 200 metros y, como Aquiles corre 10 veces más rápido que la tortuga, le dice que le dará 100 metros de ventaja.

Mientras explicaba, Daniel iba dibujando la situación en la pizarra.

—Los dos se ponen en posición y empieza la carrera. Aquiles comienza a correr, y avanza los 100 metros que le dio de ventaja a la tortuga. Pero en ese tiempo, la tortuga ya avanzó 10 metros, de modo que todavía lo aventaja. Cuando Aquiles recorre esos 10 metros, la tortuga ya avanzó 1 metro más. Aquiles sigue corriendo y avanza ese metro, pero la tortuga en el mismo tiempo ya ha avanzado 10 centímetros. Así siguen corriendo hasta los 200 metros, sin que Aquiles pueda alcanzar nunca a la tortuga. Y ésta resulta ganadora.

—Ahora entiendo —señaló Ana María—, pero esto no pasa en la realidad.

—Así es —respondió Daniel—. A esas situaciones contradictorias se les llama “paradojas”.

—¿Y quién las inventó? —preguntó Nicol.

—Zenón, uno de los más célebres pensadores griegos, en el siglo V a.C.

—¿Y nadie ha podido determinar por qué se produce ese error? —consultó Elena.

—Recién en el siglo diecisiete, el matemático escocés James Gregory estudió, por primera vez y de manera sistemática, la forma de terminar con el dilema de Zenón —respondió Daniel—. Lo hizo a través de las llamadas series convergentes, sumas que a pesar de tener un número infinito de términos, dan como resultado un número finito. Por ejemplo, la suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$, puede hacerse, y da exactamente 1. Esta materia se ve y profundiza en 4º medio con los alumnos que ingresan a la Formación Diferenciada de matemática.

—Ya anotamos el listado de palabras —señaló Nicol.

—Perfecto, volvamos a lo nuestro —dijo Daniel—. En la lectura de expresiones algebraicas es fundamental hacerlo considerando, en primer lugar, a la operación que afecta a toda la expresión. Me explico, si tenemos $\frac{x-2}{4}$, toda la expresión está divida por 4, por lo tanto debo leer: "la cuarta parte de la diferencia entre un número y 2". No es lo mismo que tener, por ejemplo, $\frac{x}{4}-2$, donde la operación principal es la resta, o sea debo leer: "la diferencia entre la cuarta parte de un número y dos"

—Ahora voy entendiendo —comentó Ester—, por eso en la expresión que nos dio al principio de la clase fallábamos todos, porque comenzábamos a leer en cualquier parte.

—Así es —afirmó Daniel—. Otro ejemplo es la expresión $(3x)^2$, que se lee: "el cuadrado del triple de un número cualquiera", ya que toda la expresión está afectada por el cuadrado. No es lo mismo $(3x)^2$ que $3x^2$; en este último caso, lo fundamental es el producto y se lee: "el triple del cuadrado de un número cualquiera".

—Señor. ¿Puedo leer la expresión que nos dio al principio $\frac{5x^2-(4x)^3}{3}$? —consultó Milena.

—Por supuesto, y te felicito por tomar la iniciativa. Dime.

—La expresión equivale a "la tercera parte de la diferencia entre el quíntuplo del cuadrado de un número y el cubo del cuádruplo de…" ¿Cómo digo ahí?

—Del mismo número —le respondió Ricardo.

—Perfecto —reconoció Daniel—. Ahora vamos a hacer un pequeño coro y van a leer lo siguiente $\left(\frac{3x-(5y)^2}{5}\right)^3$.

Y todos leyeron a una voz: "El cubo de la quinta parte de la diferencia entre el triple de un número cualquiera y el cuadrado del quíntuplo de otro número"

—Un aplauso para ustedes mismos —señaló Daniel comenzando a aplaudir—. Los felicito. Y el objetivo de aprender a leer estas expresiones es que cuando encuentren problemas en forma verbal, ustedes puedan sin mucha dificultad pasarla a una expresión algebraica.

—¿Cómo cuál? —preguntó Andrés.

—Dentro de poco vamos a resolver ecuaciones de primer grado y, en ese contenido, aparecerán problemas como "si al triple de un número se le agrega su cuarta parte se obtiene 15. Determinar ese número" y allí verán la gran ventaja de haber aprendido a leer expresiones como las de hoy.

—Yo ya lo planteé señor — dijo Ángel mostrando en su cuaderno la expresión $3x+\frac{x}{4}=15$

—¡Excelente! De eso se trata —señaló Daniel—. La próxima clase, voy a evaluar el aprendizaje de lo que trabajamos este día. Y para que se preparen en conciencia, voy a entregarles una guía de trabajo. No desaprovechen la oportunidad de aprender.

Daniel se retiró de la sala, mientras el timbre señalaba el momento de un merecido descanso.

CINE EN EL AULA

Aquella mañana, Daniel quiso darles una sorpresa a sus alumnos del tercer año medio. Apenas llegó a la sala, pasó la lista y les comunicó que la clase se realizaría en la sala de audiovisuales.

—¿Vamos a ver un video, señor? —preguntó Rosa.

—Exactamente, pero allá les cuento los detalles. ¡Vamos!.

Una vez instalados en la sala, Daniel hizo una breve introducción sobre la película que verían en unos instantes.

—Hay muy pocas ocasiones —comentó Daniel— para utilizar cine en la clase de matemática. Las películas que hacen referencia a asuntos de matemática son puntuales y, generalmente, vinculadas a biografías de científicos famosos. O bien, son documentales hechos específicamente para la enseñanza de conceptos concretos. Sin embargo, esta película tiene un argumento matemático en sí mismo, por lo que no podemos dejar de verla. El nombre de la película es "Pi: fe en el caos", y fue hecha el año 1998 bajo la dirección del Darren Aronofsky; la actuación principal corresponde al actor estadounidense Sean Gullette. Está clasificada en el género de thriller y ciencia ficción, así que espero que les guste. Desde ya, les advierto que es muy importante la concentración para poder entender toda la trama, ya que es una película un poco compleja. Como en todas las actividades que hacemos, al final de la clase les entregaré la pauta de trabajo sobre esta película.

La concentración fue total, durante la exhibición del video; sólo se escucharon algunos comentarios en la escena del taladro.

La película terminó en el preciso momento en que sonaba el timbre para ir a recreo. Daniel entregó la pauta que los alumnos deberían traer desarrollada la próxima clase. Todos abandonaron la sala de audiovisuales comentando la película.

La pauta contenía el siguiente texto:

Realiza un comentario sobre la película.

Señala los aspectos relacionados con la matemática que pudiste apreciar.

De acuerdo con lo visto en la película, explica qué es para ti un modelo matemático.

Señala la diferencia entre un numerólogo y un matemático.

¿Crees que existe un orden oculto que gobierna toda la existencia del cosmos, como lo creía el protagonista?

Expresa argumentos a favor y en contra sobre si puede la obsesión por algo llevarnos a la locura, y si es negativo para una persona dedicar demasiado tiempo a la investigación.

En la película aparecen referencias a la Teoría del Caos. Busca alguna información al respecto.

Investiga sobre el juego del Go.

En la película se mencionan los números de Fibonacci. Investiga sobre ello.

La clase siguiente fue muy animada y polémica. A medida que los alumnos leían sus respuestas y opiniones, surgían nuevas interrogantes que, entre todos, buscaban responder.

—Me interesa que profundicemos sobre Fibonacci —comentó Daniel—. Así que les voy a dar un trabajo para la próxima clase, basado en lo siguiente: En la película, el protagonista indica cómo se construye la espiral logarítmica a partir de la sucesión de Fibonacci del siguiente modo: comenzando con un cuadrado de 1 cm de lado, se añade otro cuadrado idéntico para obtener un rectángulo 2x1. Se añade, a este rectángulo, un cuadrado 2x2 por el lado más largo, para formar un rectángulo 3x2. A éste, se le añade un cuadrado 3x3, obteniéndose un rectángulo 5x3, y así sucesivamente. Uniendo los extremos opuestos mediante arcos de circunferencia, se obtiene la "espiral dorada".

—La actividad a realizar es la siguiente —concluyó Daniel—: realizar la construcción que acabo de señalar en papel milimetrado, llegando hasta donde lo permita el tamaño de la hoja, y dibujar posteriormente la espiral. Luego, responder lo siguiente: ¿Dónde se encuentra la sucesión de Fibonacci y la razón aurea en esta construcción?

—Profe, ¿existe, realmente, alguna relación entre las matemáticas y la bolsa? —preguntó Javier.

—Claro que sí —expresó Daniel—; cuando un valor de la bolsa ha empezado a cambiar su tendencia después de algunos días subiendo o bajando de forma clara, se puede prever que la corrección será del 61.8%. Observa los decimales de $\frac{1}{\varphi}$ y compáralos con los de φ, o del 38.2% que corresponde a $1 - \varphi$. Son las llamadas líneas de Fibonacci, tenidas muy en cuenta por los analistas de mercados financieros. También se aplican para tratar de identificar cambios en las tendencias de mercado y se dibujan en periodos de tiempo proporcionales a 5, 8, 13, 21... Como puede observarse, la película está bien documentada al respecto; claro que de ahí a exista un modelo que permita determinar de antemano las variaciones de la bolsa, ya es otra cosa.

—Señor, otra pregunta, antes de que terminemos la clase —dijo Milena—. Además de la utilidad de pi en la fórmula del perímetro y del área de la circunferencia, ¿se utiliza en algo más?

—Ustedes saben —respondió Daniel— que el valor de Pi tiene infinitos decimales y alguna vez les comenté que existen grupos de personas que programan sus computadores para alcanzar nuevos records de decimales deπ. Por ejemplo, en 1995, el equipo del japonés Yasumasa Kanada de la Universidad de Tokyo logró 6.442.450.938 decimales. Ustedes pueden pensar que estos son cálculos inútiles, pero son un test que permiten localizar errores en los cada vez más potentes microprocesadores. Fue así como se detectó un famoso error en el primer Intel Pentium hace algunos años.

CIGARRAS MATEMÁTICAS

—Daniel, ¡qué bueno que te encuentro! —exclamó Rocío.

—¿Qué te pasa, mujer, que vienes tan desesperada —dijo sonriendo Daniel.

—¿Recuerdas que al comenzar el año quedamos de acuerdo en enseñar la matemática en forma contextualizada y dejando en claro a los alumnos, la utilización práctica de cada contenido?

—Si, por supuesto. Es lo que todos estamos haciendo en clases —le confirmó Daniel.

—Pues, me surgió un problema —dijo Rocío e hizo una pausa—: ¿Para qué sirven los números primos?

En ese instante entró a la sala de profesores Camila, quien al escuchar la pregunta se incorporó al tema.

—Hace algún tiempo leí que los números primos se utilizaban, por ejemplo, en el ámbito del espionaje —dijo Daniel.

—¿Cómo es eso? —preguntó extrañada Rocío.

—Allá por los setenta estaba el desafío de encontrar un proceso matemático que fuese fácil de llevar a término en una dirección, pero muy difícil de realizar en la dirección opuesta, ya que sería perfecto para los mensajes cifrados. Tú podrías, por ejemplo, tener la clave dividida en dos partes y publicar la parte correspondiente al cifraje. Cualquiera podría enviarte mensajes cifrados, pero solo tú conocerías la parte descifradora de la clave.

Rocío escuchaba un poco confundida.

—En 1977 —continuó Daniel— un equipo de matemáticos y científicos informáticos del *Massachusetts Institute of Technology*, se dieron cuenta que los números primos eran la base ideal para lo que te comentaba anteriormente, es decir, un proceso sencillo para cifrar pero, a la vez, difícil para descifrar. Si quisieras generar tu propia clave, bastaría con tomar dos números primos muy grandes, por ejemplo de 80 dígitos cada uno; los multiplicas y obtienes un número que, obviamente, no es primo. Para descifrar el mensaje haría falta conocer los dos números primos, lo que sería una "misión imposible".

Rocío asintió con la cabeza.

—Obviamente —agregó Daniel—, estoy hablando de un número de más de 100 cifras; que implicaría años de trabajo para los computadores más potentes del mundo. Por lo tanto, sería fácil hacer perder el rastro a los espías, bastaría con cambiar la clave una vez al año.

Camila, que había permanecido en silencio escuchando la explicación de Daniel, agregó nueva información.

—Hace poco tiempo, escuché en un programa de radio que los números primos se utilizaban en el estudio de la evolución de los insectos.

—Eso sí que no lo había escuchado —comentó Daniel.

—Sería interesante saber sobre eso —dijo Rocío.

—No recuerdo muy bien los detalles que dieron a conocer en ese programa, pero si le preguntamos a Tomás tal vez sepa de lo que hablamos.

—Voy a buscarlo —dijo Rocío—, hace un momento lo vi en el pasillo conversando con algunos alumnos sobre la PSU de Biología.

Rocío salió rápidamente de la sala de profesores y a los pocos minutos regresó, acompañada de Tomás que traía una gran cara de interrogante.

—Tomás. Tenemos una consulta que hacerte, tal vez no muy común, pero sería importante para nosotros saber la respuesta —comenzó Daniel.

—Además, sería un buen punto de unión entre la matemática y la biología —aportó Camila.

—Bien. ¿De qué se trata? —preguntó intrigado Tomás.

—¿Sabes si en el estudio de la evolución de los insectos, hay algo relacionado con los números primos? —preguntó Rocío.

—Seguramente ustedes se refieren a las cigarras —respondió Tomás—; por ejemplo, la cigarra Magicicada Septendecim tiene el ciclo vital más largo de todos los insectos; su ciclo vital empieza bajo tierra, donde las ninfas absorben pacientemente el zumo de las raíces de los árboles. Después de 17 años, las cigarras adultas emergen de la tierra en gran número, se aparean, ponen los huevos y mueren. Los zoólogos —continuó Tomás— se han preguntado por qué el ciclo vital de esta cigarra es tan largo y por qué dura un número primo. De hecho, otro tipo de cigarra, la Magicicada Tredecim, aparece cada 13 años, también un número primo. La hipótesis que manejan los científicos es que esto implica algún tipo de ventaja para la conservación de la especie.

—¿Por qué? —preguntó Daniel.

—Hay una teoría —respondió Tomás— que señala que la cigarra tiene un parásito que también recorre un ciclo vital, y que la cigarra, obviamente, debe evitar. Supongamos que el parásito tiene un ciclo vital de 2 años; para defenderse, la cigarra buscará un ciclo vital que no sea divisible por 2, y así no coincidir regularmente; lo mismo ocurrirá si el parásito tiene un ciclo vital de 3 años. Por lo tanto, para evitar encontrarse con su parásito, la mejor estrategia de la cigarra es tener un ciclo de vida largo, que dure un número primo de años. Como nada dividirá el 17, la Magicicada Septendecim se encontrará con su parásito cada 34 años si el parásito tiene un ciclo de 2 años; si el ciclo vital del parásito es de 16 años, la cigarra lo encontrará, apenas, cada 272 años. En conclusión —finalizó Tomás—, el largo ciclo vital de las cigarras y el número primo de años, las protege.

—Muchas gracias, Tomás, por ayudarnos —señaló Camila

—Sí, muchas gracias —reiteraron a una voz Rocío y Daniel.

—Cuando gusten, colegas —respondió Tomás, saliendo de la sala de profesores.

—¡Es muy capo este Tomás! —exclamó Camila.

—Es una gran ventaja contar con un colega que sabe tanto —apoyó Daniel.

—Y yo me voy feliz —expresó Rocío sonriendo—. Gracias a los capos de la matemática y de la biología, mis alumnos quedarán maravillados con los números primos.

—Esto que acabamos de aprender, voy a comentárselo a mis alumnos de media. Creo que es importante que ellos conozcan este aspecto sobre los números primos —dijo Daniel.

—Estoy de acuerdo —contestó Camila—, yo haré lo mismo en mis cursos.

COBRO TELEFÓNICO

—Tal como les anuncié la clase pasada —dijo Daniel—, hoy iniciaremos nuestro trabajo con los llamados sistemas de ecuaciones. Éste no es un tema nuevo en matemática; los babilonios, por ejemplo, determinaban las incógnitas en forma muy curiosa para nuestro tiempo, ya que representaban las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área, volumen, sin que tuvieran relación con problemas de medida. Por ejemplo, en una tablilla babilónica se planteaba lo siguiente:

un cuarto de anchura + longitud = 7 manos

anchura + longitud = 10 manos

Y para resolverlo comienzan asignando el valor 5 a una mano. Por ahora, sólo les enuncio el problema, más adelante lo resolveremos… Los griegos —siguió contando Daniel— también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero utilizaban métodos geométricos; uno de ellos, Thymaridas, en el 400 a.C., encontró una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas. También Diofanto resolvió problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero lo hizo convirtiéndolos en una ecuación lineal. Claro que él sólo aceptaba las soluciones positivas, pues lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. Unas de las dificultades, en la resolución de ecuaciones por Diofanto, es que carece de un método general y utiliza, para cada problema, métodos muchas veces excesivamente ingeniosos. Y para confirmar qué tan antigua es la resolución de sistemas de ecuaciones —dijo Daniel—, en el siglo III a.C. un matemático chino escribió el libro “El Arte Matemático”, el cual contiene algunos problemas resueltos.

Daniel hizo una pausa, buscó en su maletín y sacó un libro.

—Ahora, le voy a pedir a Pamela que lea un poema que pertenece a Rafael Rodríguez Vidal y que publicó en su libro “Enjambre

Matemático”; después, se los voy a entregar escrito para que cada uno determine lo que el poema en su último verso pide.

Pamela comenzó la lectura del poema.

“Por presumir de certero
un tirador atrevido
se encontró comprometido
en el lance que os refiero:

Y fue, que ante una caseta
de la feria del lugar
presumió de no fallar
ni un tiro con la escopeta,

y el feriante alzando el gallo
un duro ofreció pagarle
por cada acierto y cobrarle
a tres pesetas el fallo.

Dieciséis veces tiró
el tirador afamado
al fin dijo, despechado
por los tiros que falló:

"Mala escopeta fue el cebo
y la causa de mi afrenta
pero ajustada la cuenta
ni me debes ni te debo".

Y todo el que atentamente
este relato siguió
podrá decir fácilmente
cuántos tiros acertó.”

Daniel repartió la hoja con el poema escrito y esperó, por algunos minutos, que sus alumnos solucionaran el problema, mientras paseaba por la sala observando de qué modo enfrentaban su resolución. Cuando consideró que había pasado tiempo suficiente, decidió revisarlo.

—Planteemos la situación —señaló Daniel— simbolizando por A sus aciertos y por F sus fallos, obtenemos que $A — 3F = 0$ y $A + F = 16$, es decir, dos ecuaciones. Voy a enseñarles a resolver este tipo de ejercicios, llamados sistemas de ecuaciones, usando tres métodos distintos: Igualación, Sustitución y Reducción.

Daniel explicó cada uno de los métodos, obteniendo como resultado que el tirador falló 4 veces y que acertó 12.

—Vamos a ejercitar estos métodos para lo cual les pido que utilicen su cuaderno en forma horizontal, dividiéndolo en tres partes de la siguiente manera —y anotó en la pizarra:

IGUALACIÓN	SUSTITUCIÓN	REDUCCIÓN

Una vez que practicaron cada uno de los métodos, Daniel les señaló que había llegado el momento de aplicar los sistemas de ecuaciones a problemas de la vida cotidiana.

—Supongamos Álvaro —dijo dirigiéndose a él y anotando en la pizarra— que tu familia quiere instalar una línea telefónica y, para ello, consultan precios en dos compañías. Una cobra un cargo fijo mensual de \$4.500 más \$7 por minuto en cualquier horario. La otra cobra \$5.800 más \$3 por minuto. La tarea de tu familia es determinar cuál compañía ofrece una mejor propuesta. ¿Qué se debe hacer?

—Lo primero, escribir las ecuaciones que resultan del problema —respondió Álvaro.

—¿Y cuáles serían esas? —preguntó Daniel.

—La primera ecuación sería $y = 4.500 + 7x$ y la segunda $y = 5.800 + 3x$ —contestó el mismo Álvaro.

—Perfecto —aclamó Daniel—. Si resolvemos el sistema de ecuaciones con las funciones de costo determinadas por Álvaro, ¿qué se obtiene?

—El resultado del sistema, los valores x e y —respondió Andrés.

—De acuerdo, pero para la familia de Álvaro que quiere saber qué compañía le conviene ¿qué significado tiene? —preguntó Daniel.

—Creo que los datos que obtendríamos, no les servirían de mucho —opinó Elena.

—¿Por qué? —preguntó Álvaro, girando su cabeza para mirarla.

—El resultado nos daría la cantidad de minutos en que las dos compañías cobrarían lo mismo —explicó Elena.

—Muy bien Elena, eso es correcto. Resolvamos el sistema y veamos qué resulta —dijo Daniel.

Luego de unos minutos de trabajo, la respuesta ya estaba lista.

—Los resultados son x = 325 e y = 6.775 —señaló Estefanía.

—¿Y eso qué significa? —preguntó Daniel.

—Que a los 325 minutos, ambas compañías cobran lo mismo, o sea $6.775.

—¿Le sirve a la familia de Álvaro ese dato para decidir qué compañía tomar? —consultó Daniel.

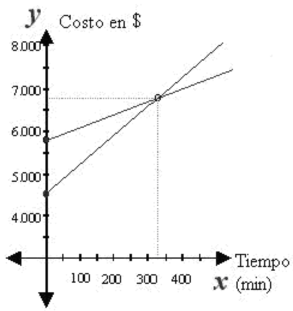
—Creo que no —respondió Álvaro.

—¿Qué podemos hacer, entonces, para solucionar este problema?

—Si graficamos, tal vez podamos visualizar mejor la situación —sugirió Ester.

—¡Buena idea! —exclamó Daniel.

Y comenzaron a graficar



—Ahora sí que está más claro —reconoció Elena—. Si la familia habla pocos minutos al mes, le conviene la compañía que cobra un cargo fijo mensual de $4.500 más $7 por minuto; pero si la familia ocupa el teléfono más de 325 minutos al mes, le conviene la otra compañía.

—Entonces, con el gráfico, la familia de Álvaro ya puede definir qué compañía le conviene más. ¿Sirvió de algo resolver el sistema de ecuaciones? —preguntó Daniel.

—Creo que no —respondió María Paz.

—Yo creo que sí —opinó Estefanía—; con el valor del tiempo obtenido, la familia de Álvaro estudiará si al mes habla más de 325 minutos o menos y, de acuerdo a eso, definirá la compañía que más le conviene.

—¡Excelente! Los felicito a todos por el trabajo realizado; espero que hayan podido apreciar que la matemática está en todas partes y que es muy, pero muy útil para nuestra sociedad.

Con esas palabras, Daniel concluyó su clase.

SEMANA DE LA MATEMÁTICA

Como cada año, entre el 12 y el 17 de agosto se celebraría en el colegio “Nuevo Horizonte”, la “Semana de la Matemática”. El Departamento de Matemática se reunió en pleno para programar tan importante celebración.

—Este es el tercer año en que celebramos la “Semana de la Matemática” —comenzó diciendo Camila—, por lo que debemos perfeccionar lo hecho anteriormente y agregar nuevas actividades que vayan de acuerdo con la forma en que estamos realizando nuestras clases actualmente.

—Estoy de acuerdo con iniciar nuestro trabajo así —dijo Rocío— y me parece muy positivo que este año se hayan incorporado Maira y Esteban para programar actividades en matemáticas de 1º a 4º básico también.

—Comencemos —acotó Camila— anotando las fechas y horarios de las actividades que se realizarán y, como decía anteriormente, ubicando de inmediato las que resultaron exitosas los años anteriores.

—Creo que “La búsqueda del Tesoro” se podría mantener —señaló Daniel— incorporando este año al primer ciclo básico.

—¿En qué consiste eso? —preguntó Esteban.

—Consiste en la resolución de acertijos creados por nosotros. Cada equipo —explicó Marta—, formado por 10 alumnos, representantes de cada nivel, deben resolver 10 acertijos. Se les entrega un primer acertijo aquí en el colegio y, a medida que los resuelven, van avanzando. Cada acertijo los envía a una determinada dirección de alguna casa o lugar comercial, con quienes se conversa previamente y allí les entregan el sobre con el acertijo siguiente. Gana el que vuelva primero al colegio con los 10 acertijos resueltos.

—Se escucha entretenido, pero para los más pequeñitos podría ser peligroso que salgan del colegio —comentó Maira.

—Podemos limitarlo, tal como lo hacemos con los alumnos de 5º a 8º —sugirió Daniel—, ya que ellos tienen que resolver acertijos que los llevan sólo a lugares interiores o cercanos al colegio.

—Se puede disminuir la cantidad de acertijos —propuso Esteban— y que la búsqueda sea sólo dentro del colegio.

—Parece que estamos todos de acuerdo con esta primera actividad —concluyó Camila.

—¿Y por qué no incorporamos a los apoderados? —preguntó Rocío.

—¡Buena idea! —exclamó Daniel—. Estoy seguro que a muchos padres y apoderados les encantaría participar en algo así.

—Y apoderadas —señaló Camila sonriendo.

—Me refería a todos y TO-DAS —recalcó Daniel, sonriendo también.

—El horario de la competencia tendría que establecerse después de las 19 horas —aportó Marta.

—De acuerdo —señaló Camila—. Primera actividad lista. Vamos a la siguiente.

—Tengo una duda —dijo Maira—. ¿Cuál es el tesoro?

Todos rieron y le explicaron.

—Lo da la dirección del colegio —explicó Rocío— y, generalmente, son unos paquetones grandes de dulces o chocolates que representan simbólicamente el tesoro.

—La otra actividad que podemos mantener es la que llamamos "¡A razonar!" —dijo Camila— que consiste en plantear cada día un problema de razonamiento matemático. Los alumnos colocan sus respuestas en un buzón preparado para este fin y, cada tarde, se revisan las respuestas, dándose puntaje de acuerdo a lo respondido. Se publican al día siguiente las respuestas y los puntajes obtenidos por cada alumno, siendo estos acumulativos para así obtener el ganador de la semana, el cual recibe un obsequio.

—Para los más pequeños —dijo Marta—, podemos efectuar un concurso de dibujo creativo que incluya sólo elementos matemáticos; circunferencia, cuadrados, triángulos, etc.

—¿Hay acuerdo con las actividades señaladas? —preguntó Camila.

—¡Siii! — respondieron todos a coro, tal como lo hacen los alumnos en clases.

—Sigamos manteniendo el concurso "Riendo con la Matemática" —señaló Daniel—, que es un concurso de creación de chistes matemáticos, ya sea en forma verbal o en caricatura; éstos se depositan en el buzón correspondiente y se premian los mejores, una vez terminada la semana.

—Ya tenemos claras las actividades que vamos a repetir de los años anteriores —dijo Camila—. Ahora viene la parte creativa: ¿Qué otras actividades podemos incorporar?

—Hay una actividad que me gustaría que se realizara, ya que permitiría ver la matemática desde un punto de vista más real y en la vida misma —sugirió Daniel—, que es precisamente en lo que estamos actualmente. Se trata de realizar un concurso de fotografía sobre algún elemento, objeto, construcción, etc., que tenga la forma de alguna figura o cuerpo matemático. También, se puede considerar la foto de algún alumno o apoderado disfrazado, caracterizando a algún matemático famoso o en una situación matemática evidente.

—Es interesante la propuesta, pero ¿será factible? —señaló Marta.

—Intentémoslo, creo que podemos llevarnos algunas gratas sorpresas.

—De acuerdo. ¿Alguna otra idea que quieran dar conocer? —preguntó Camila.

—Para el primer ciclo básico, podemos establecer un concurso de creación de "Cuentos Matemáticos" —propuso Rocío.

—No sólo para ellos —dijo Marta—; hagámoslo para todo el colegio, así damos oportunidad de participar a los que tiene habilidad en el área de lenguaje.

—¿Aprobado?... Aprobado —dijo Camila—, y aprovechemos la popularidad que está teniendo por estos días el juego matemático Sudoku y efectuemos una competencia.

—Tienes razón —apoyó Daniel—; he visto a muchos alumnos entretenidos con ese juego.

—Para el área de computación, podemos realizar el concurso “Creando en PowerPoint” —propuso Maira—, donde los alumnos deben realizar una presentación de un tema matemático. Estoy segura que los más pequeñitos, con la habilidad que tienen ahora en computación, también podrán participar.

—Incluso —apoyó Marta—, podemos hacer algunas competencias con juegos matemáticos en los computadores, estableciendo los ganadores de acuerdo al puntaje que alcancen.

—Sería motivador para algunos alumnos, de bajo rendimiento en matemática, que se les asignara la responsabilidad de coordinar el manejo de un diario mural que tenga, por ejemplo, adivinanzas, acertijos, anécdotas, curiosidades matemáticas, etc., o alguna otra actividad. —propuso Maira—. Y que sean ellos mismos los encargados de publicar cada mañana los resultados de los diversos concursos y los respectivos puntajes logrados por cada alumno.

—Me parece una excelente idea —respondió Camila.

—Sólo falta confirmar quiénes serán los expositores invitados y, con eso, tendríamos armada la “Semana de la Matemática”.

—Daniel, no olvides conseguirte con tiempo las películas que vamos a exhibir esa semana —dijo Camila.

—No te preocupes, ya las tengo en mi poder —respondió Daniel.

CAMINO ALREDEDOR DE LA PISCINA

—Iniciaremos nuestra clase con la siguiente actividad —señaló Daniel, al tercer año medio—. Primero, dibujen en su cuaderno un cuadrado de x cm de lado.

Esperó que todos hubiesen terminado su dibujo y agregó otra información.

—Ahora, aumenten en 2 cm dos lados paralelos para formar, así, un rectángulo. Calculen el área del rectángulo obtenido y me dicen el resultado.

—Me dio $x^2 + 2x$ —dijo Pedro.

—Bien, ahora resolvamos la siguiente situación: Mónica tiene una piscina rectangular de 5 por 3 metros. Ella quiere hacer un camino con un ancho x constante, alrededor de la piscina. Determinen el área del camino.

Lo primero que hicieron todos fue representar el problema a través de un dibujo. Daniel ya los había acostumbrado a esa forma de trabajo, basada en dibujos.

—Tenemos que hacer el producto $(5+x)$ por $(3+x)$ —señaló Rosa.

—No —le contestó Camilo—, fíjate bien en tu dibujo. Es $(5+2x)$ por $(3+2x)$.

—Les voy a pedir que, antes de sacar conclusiones, lean bien el enunciado y miren su dibujo, haciendo el análisis correspondiente. Después se preocupan de la parte algebraica.

Momentos después, la mayoría tenía el resultado correcto.

—Yo no había leído que se pedía el área del camino —dijo Camilo—, por eso había hecho el producto $(5+2x)$ por $(3+2x)$, o sea, el área del rectángulo.

—Tenías que restarle el área de la piscina —aportó Javier.

—Veo que ahora estamos todos claros —acotó Daniel—. A continuación, vamos a considerar que el ancho del camino que se quiere hacer es 0 m, 1 m, 2 m, 3 m y 4 m. Coloquen los resultados obtenidos en una tabla. Periodo período

—Listo señor. ¿Qué hacemos ahora? —preguntó Rosa.

—Grafiquen, en un sistema de coordenadas, los puntos obtenidos.

Durante un rato, todos se concentraron en hacer su gráfico y sólo llamaban a Daniel cuando se les presentaban dudas en los cálculos o en la escala para hacer el gráfico.

—Mónica, por favor, pasa a hacer el gráfico que obtuviste en la pizarra.

—Señor, ¿cómo se llama ese gráfico? —preguntó Javier.

—La curva dibujada corresponde a una parábola —explicó Daniel— y es el resultado de graficar una función de segundo grado o función cuadrática, que es el tema que vamos a trabajar durante las próximas semanas.

Con respecto al gráfico hecho, quiero que respondan a dos desafíos. Primero, si Mónica quiere que el área del camino sea de 30 m^2, ¿cuál debe ser el ancho x del camino? y segundo, ¿para qué valor de x, el área es 100 m^2?

Una vez finalizada la actividad, Daniel les pidió graficar la primera expresión obtenida, es decir, $A = x^2 + 2x$

—En la próxima clase, vamos a trabajar en el laboratorio de computación con el programa Graphmatica y, allí, graficaremos varias funciones cuadráticas, para luego extraer algunas conclusiones respecto de sus coeficientes y otras cosas. También, conversaremos sobre la aplicación que tiene la parábola en la vida cotidiana, así que, no se lo pierdan —finalizó Daniel sonriendo.

PREPARANDO OLÍMPICOS

Aquella mañana, Camila y Daniel se reunieron con Freddy para que, como Jefe de la UTP, conociese el listado de los alumnos que participarían en la fase regional de la Olimpiada Nacional de Matemática. Después de aplicar una prueba a cada curso, los seleccionados fueron Estefanía y Lidia de primero medio, Álvaro y Sofía de segundo medio, Mónica y Eduardo de tercero medio, Boris y Diego de cuarto medio; los seleccionados comenzarían una etapa de entrenamiento que consistiría en reunirse cada semana, durante una hora, con Camila o con Daniel para trabajar algunos contenidos propios de ese tipo de competencia. Acordaron que las horas de preparación serían los martes de 5 a 6 de la tarde. Una vez terminada la reunión con Freddy, tomaron algunas decisiones sobre el tema.

—Como decía Freddy —expresó Camila—, y tiene toda la razón, las seis clases que alcanzaremos a hacer, de aquí a la prueba, deben planificarse.

—Por supuesto —señaló Daniel.

—Estoy de acuerdo —comentó Camila—, aunque tengo algunos reparos con respecto a la preparación.

—¿De qué se trata? —preguntó Daniel

—Sobre el objetivo de las olimpiadas —señaló Camila pensativa—. Lo que se busca es encontrar jóvenes talentosos que puedan encauzar adecuadamente su gusto por la matemática. Entonces… ¿Hay que prepararlos?

—Claro. Ya sabemos que a ellos les gusta; por eso, debemos darles algunas herramientas adicionales para que puedan, como bien decías tú, encauzar ese gusto y acrecentarlo. Por lo tanto —agregó Daniel—, una preparación, como la que vamos a hacer, no los perjudica; por el contrario, les abriremos la mente con nuevos y motivadores desafíos, con relatos históricos, anécdotas, falacias, puzzles, etc.; sería un tremendo error, llevarles 100 ejercicios de álgebra para resolver.

—Oye Daniel, estás hecho todo un "reformista" —bromeó Camila.

—Eso confirma que, para ser reformista, no importa la edad —le respondió Daniel, siguiendo la broma.

El día viernes, como cada semana, Daniel y Camila se reunieron; aunque esta vez, fue con el claro objetivo de planificar la preparación a la olimpiada, por lo que cada uno llegó con su cargamento de materiales y libros para ello.

—Bien, ¿cómo empezamos? —preguntó Daniel.

—Empecemos definiendo qué hará cada uno —respondió Camila—. Yo había pensado en trabajar, separados en dos grupos. Mientras tú trabajas una semana con los seleccionados de 1º y 2º medio, yo lo hago con los de 3º y 4º medio. A la semana siguiente, cambiamos y tú le haces clases a 3º y 4º y yo, a 1º y 2º medio. ¿Qué te parece?

—Excelente. Ahora, debemos definir los temas a tratar en esos encuentros.

—A los dos grupos, debemos hacerles una introducción sobre la Teoría de Números —opinó Camila.

—Sí, estoy de acuerdo —apoyó Daniel a Camila—; podemos trabajar sobre la divisibilidad de los números, aspectos como el máximo común divisor, números primos y coprimos, congruencias y ecuaciones diofánticas.

—También, funciones aritméticas y sucesiones —agregó Camila.

—Los alumnos de 3º y 4º van a ir más rápido, pues ya tienen algunos conocimientos de esos contenidos, por lo que una vez que finalicen, se les puede hacer trabajar sobre inducción matemática.

—Y para ambos grupos, podemos preparar algunos desafíos geométricos, utilizando Semejanza y los infaltables Teoremas de Pitágoras, Thales y Euclides.

—Bien, ya acordamos los contenidos; planifiquemos, ahora, nuestras primeras clases —sugirió Daniel.

—De acuerdo —señaló Camila.

—Podríamos comenzar desafiándolos con alguna situación problemática; por ejemplo, el producto de tres números pares consecutivos cualesquiera, está dado por 88xxxxx2, donde cada x representa un dígito y pedirles que determinen los dígitos faltantes.

—Te aseguro que algunos va a empezar a buscar números al azar —dijo Camila.

—Es parte de la idea, que sepan que, a lo mejor, con el azar pueden llegar a determinar la respuesta, pero después de 2 horas —sonrió Daniel—. Lo fundamental es que aprendan métodos de resolución. Después, con el tiempo, ellos van a crear sus propias formas de trabajo y te aseguro que ya no será al azar.

Camila se puso de pie, se acercó a la pizarra de la oficina en que se reunían y comenzó a resolver el problema planteado.

—Voy a escribir el número 88xxxxx2 con los puntos de separación correspondiente, es decir, 88.xxx.xx2, por lo que estamos hablando de 88 millones y tanto. Y como 80.000.000 es menor que 88.xxx.xx2, que corresponde al producto de los pares consecutivos; suponiendo que n es un número par, podemos escribir que:

$$88 \cdot 10^6 < (n-2)n(n+2) = n^3 - 4n < n^3 .$$

Como $440^3 < 88 \cdot 10^6 < 450^3$ el número n es superior o igual a 442.

—Sabemos que tres números pares consecutivos terminan en 0—2—3 o en 4—6—8, o en 6—8—0, o en 8—0—2 —señaló Daniel—, pero la única forma en que el último dígito del producto pueda resultar 2, es si los pares consecutivos terminan en 4, 6, 8.

—Eso implica que los números deben ser 444, 446 y 448 —concluyó Camila.

—Al multiplicarlos, —dijo Daniel, con su calculadora en la mano—, el resultado es exactamente… 88.714.752

—Por lo tanto, los dígitos faltantes son 7, 1, 4, 7 y 5 —dijo Camila.

—Correcto —afirmó Daniel—, un buen ejercicio para partir, ¿cierto?

—Estoy de acuerdo —dijo Camila.

—La idea de este tipo de ejercicios es que los alumnos aprendan que siempre existe algún procedimiento más conveniente que buscar la solución al azar —comentó Daniel.

—Y podemos trabajar la primera clase, dando algunos contenidos básicos de Teoría de Números que permitan resolver este tipo de ejercicios y darles nuevos desafíos —sugirió Camila—. Por ejemplo, que encuentren dos números enteros a y b de modo tal que $a^2 + b^2 = 1.989$

—Agrega el siguiente —dijo Daniel—: se sabe que el número 2xy89 es el cuadrado de un número natural; encontrar los dígitos x e y.

—Daniel, ¿tú sabes cómo se asignan los puntajes para la corrección de este tipo de pruebas? —preguntó Camila.

—Si —le respondió Daniel— y te lo puedo explicar con el siguiente ejercicio: "A un cilindro se le inscribe una esfera y un cono, ¿en qué razón están los volúmenes de estos tres cuerpos geométricos?". El puntaje se asigna de acuerdo a lo que va logrando el alumno o alumna en el desarrollo del ejercicio. Por ejemplo, si establece la fórmula del volumen de la esfera, tiene 1 punto; si establece la del cono, 1 punto; la del cilindro, otro punto. Ahora, si logra establecer una relación entre el volumen del cilindro y el cono, recibe 3 puntos y, si relaciona los volúmenes del cilindro y la esfera, 3 puntos más.

—Entonces, cada paso logrado le da puntaje y, a medida que avanza en complejidad del problema, el puntaje es mayor —señaló Camila.

—Correcto —respondió Daniel y prosiguió—. Si logra determinar que el volumen del cilindro es igual a la suma de los volúmenes del cono y la esfera, recibe 6 puntos y, finalmente, si responde correctamente la pregunta del problema, o sea, determina la razón de los volúmenes del cono, la esfera y el cilindro, que es 1:2:3, se le otorgan 12 puntos. En conclusión, esta pregunta vale 27 puntos.

—Entonces, es muy importante enseñar a los alumnos cómo es la evaluación para que, cuando enfrenten la prueba, respondan el máximo posible, pues así podrán optar a mejores puntajes en su prueba —señaló Camila.

—Tienes mucha razón —reconoció Daniel—, debemos darles esta información.

—Con eso tenemos material suficiente para la primera clase —concluyó Camila—; para la segunda, trabajemos con lo que se refiere a divisibilidad, ya que es muy común que ese tipo de prueba tenga preguntas como: determinar todos los enteros positivos n, para los cuales la expresión $2^n + 1$ es divisible por 3.

—Me parece bien. La próxima semana, seguimos preparando esta clase. Ahora, en el tiempo que aún nos queda, demos un vistazo a cómo van nuestras clases en cada curso.

Camila y Daniel siguieron con su trabajo.

EL TEOREMA DEL VIEJO

—El hecho de que ustedes estén en el cuarto año de formación diferenciada en matemática —explicó Daniel—, implica un trabajo de mayor profundización en temas específicos, ligados con su futuro estudiantil que, de acuerdo a la opción que tomaron en tercero medio, está por el lado científico. Es por eso que, hoy, vamos a adentrarnos en la vida de un matemático muy antiguo pero muy famoso por su teorema sobre el área de un triángulo. Y como introducción, les pido que resuelvan el siguiente problema: "Determinar el área de un triángulo cuyos lados son 3 cm, 4 cm y 5 cm".

—Ese es un trío pitagórico —comentó Boris— lo que significa que el triángulo es rectángulo.

—Y el área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de sus catetos, o sea $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6cm^2$ —agregó Diego.

—Correcto —asintió Daniel—. Ahora, determinen el área de un triángulo cuyos lados miden 4 m, 10 m y 12 m.

Daniel esperó por algunos minutos que buscaran la forma de llegar al área pedida, pero finalmente reconocieron que no lo podían determinar.

—Mientras trabajaban me fijé que la mayoría hizo el dibujo, trazó la altura y optó por trabajar con trigonometría y, aunque no llegaron a determinar la solución, quiero felicitarlos porque ya reconocen los posibles caminos ante un determinado problema —comentó Daniel.

—¿Y cómo se determina el área? —preguntó Alex impaciente.

—Vamos a trabajarlo en forma general —indicó Daniel y empezó a escribir en la pizarra—. Supongamos que tenemos un triángulo de lados a, b, c, cuyos ángulos opuestos a cada uno de esos lados son α, β, γ. Entonces tenemos, por el Teorema del Coseno, que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Despejamos el coseno y obtenemos que $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

—Eso hice yo, pero después no supe cómo seguir —reconoció Ignacio.

—Ahora hay que utilizar la identidad fundamental

$$sen\gamma = \sqrt{1 - cos^2\,\gamma}$$

En ella reemplazamos el coseno por la expresión obtenida anteriormente. Ignacio, pasa por favor y desarrolla lo que acabo de proponer.

—Al reemplazar queda lo siguiente —dijo Ignacio anotando en la pizarra—:

$$sen\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2} =$$

$$\sqrt{1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}} = \sqrt{\frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}}$$

—Ahora —agregó Ignacio— extraigo raíz a los términos de la fracción y resulta

$$\frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2ab}$$

—Si trazamos la altura a la base ‘a’, podemos determinar su medida en forma trigonométrica, que es $b \cdot sen\gamma$ y ahora aplicamos esta relación en la fórmula tradicional para el área de un triángulo, por lo tanto:

$$A = \frac{1}{2} base \cdot altura = \frac{1}{2} a \cdot b\ sen\gamma$$

Daniel hizo una pausa, mientras terminaban todos de anotar—. Boris, pasa y efectúa el reemplazo de seno en la expresión que acabamos de obtener.

—Reemplazo —dijo Boris, mientras escribía— y obtenemos que

$$A = \frac{1}{2}\frac{ab\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}}{2ab} = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$$

—Desarrolla el cuadrado del trinomio y reduce los términos, para que podamos llegar a la fórmula final —señaló Daniel.

—Un pequeño procedimiento —dijo Boris, sonriendo—; allá voy.

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2)}$$

Escribiendo la cantidad subradical como una suma por su diferencia, resulta

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{[2ab+(a^2+b^2-c^2)]\cdot[2ab-(a^2+b^2-c^2)]}$$

y esto es equivalente a

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-c^2]\cdot[c^2-(a-b)^2]}$$

Transformamos nuevamente la expresión y resulta

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)}$$

—Listo.

—¿Esa es la fórmula a la que teníamos que llegar? —preguntó Diana.

—Faltan algunos pasos, pero ahora me toca a mí cooperar en la demostración —dijo Daniel continuándola.

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b+c-2c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)}{16}}$$

y esto es equivalente a

$$A=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b+c-2c}{2}\cdot\frac{a+b+c-2a}{2}\cdot\frac{a+b+c-2b}{2}}$$

o lo que es lo mismo

$$A=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)}$$

y si ustedes observan bien se van a dar cuenta que $\frac{a+b+c}{2}$ es…

—…la mitad del perímetro del triángulo —completó la frase Alex.

—Es decir, el semiperímetro —señaló Diana.

—Lo cual simbolizaremos por s —agregó Daniel—. En conclusión, la fórmula para determinar el área de un triángulo cualquiera, teniendo sólo la medida de sus lados es

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

—Ahora es fácil resolver el problema que nos dio antes —señaló Boris.

—Claro —apoyó Diana—, los lados son 4, 10 y 12 metros por lo que su semiperímetro es 13 y el área del triángulo es

$$\sqrt{13(13-4)(13-10)(13-12)}=\sqrt{13\cdot 9\cdot 3\cdot 1}=3\sqrt{39}m^2$$

—¿Quién inventó esta fórmula? —preguntó Ignacio.

—Precisamente de él quiero hablarles ahora —dijo Daniel—. Su nombre es Herón de Alejandría, y vivió aproximadamente entre los años 126 y 50 a.C., siendo un hombre de humilde origen y que la historia señala como un zapatero en su juventud y luego inventor de máquinas cuando adulto. Él inventó el odómetro, que es un sistema de engranajes combinados para contar las vueltas de una rueda; actualmente ese aparato se utiliza para medir trayectos y distancias en terrenos de superficies desiguales, como en campos, terrenos de cultivo, prados y bosques. También inventó la eolipila, precursor de la turbina de vapor, que consiste en una esfera situada sobre una caldera, a la que el vapor hace girar al salir proyectado por dos tubos excéntricos.

—Señor, yo conozco el odómetro —señaló Alex—, lo utilizamos en atletismo para medir distancias, especialmente cuando debemos correr Cross Country.

—Buen aporte, Alex, gracias —dijo Daniel y prosiguió—. Precisamente, Herón se dedicó a la Geodesia, que es la medida de terrenos, y describió un método para calcular la distancia entre Roma y Alejandría, basándose en la hora en que se observa en ambas ciudades el mismo eclipse de Luna. En su obra "La Métrica", apareció la fórmula que hemos determinado hoy y que lleva su nombre. En el mismo libro, aparecen algunos ejemplos numéricos de medida de longitudes, áreas y volúmenes, así como algunas demostraciones. Por último, quiero señalarles que "el viejo", como se conocía a Herón, escribió un libro de Física, sobre óptica "Catróptrica", en el que estudia las leyes de la reflexión y adelanta el principio de Fermat que ya hemos mencionado.

—¿Vamos a ejercitar ahora, profe? —preguntó Diego.

—Sí —respondió Daniel—, haremos ejercicios en el tiempo que nos queda y, además, les daré otros que deberán traer resueltos para la clase siguiente.

MÉTODOS VARIOS

—Quiero que me ayuden a resolver un problema —comenzó diciendo Daniel en su clase con 3º medio—. Un amigo quiere comprar un terreno rectangular que tiene 96 metros cuadrados de superficie, pero cuando le preguntó al dueño por las medidas del largo y el ancho, éste no las recordaba; lo único que sabía era que el largo tenía 4 metros más que el ancho. La idea es que me ayuden a determinar esas medidas.

—Podemos plantear una ecuación —sugirió Rosa.

—Pero primero, debemos hacer un dibujo, como recomienda siempre el profe —respondió Milena.

—Yo creo que el dibujo en este caso no es necesario —opinó Ramón.

Luego del intercambio de opiniones, y después de que cada uno optara por el procedimiento que le parecía más adecuado, apareció un inquietante silencio.

—¿Qué pasa? Los veo preocupados —señaló Daniel.

—Lo que pasa es que nos quedó un x cuadrado y no sabemos cómo despejar x para encontrar la solución —le contestó Javier.

—Yo hice los cálculos reemplazando por diversos valores hasta que llegué a la solución, que es 12 por 8 metros —comentó Pedro—, pero tiene que haber una forma de determinarlo sin tanto cálculo.

—Ya pues, Señor —dijo Camilo, con voz quejumbrosa—, hemos seguido varios caminos pero no logramos despejar x… nos podría dar alguna sugerencia.

—Está bien, me doy cuenta que lo han intentado y merecen una ayuda —reconoció Daniel—; mi sugerencia es que factoricen la expresión que determinaron.

—O sea que multiplicados den -96 y sumados 4 —concluyó Camilo— eso corresponde a (x + 12)(x — 8) = 0

—Y como el producto de los binomios es 0, significa que uno de ellos es cero —aportó Ramón.

—Por lo tanto, si consideramos que x + 12 es 0, significa que x vale -12 o también, que si x — 8 es 0, entonces x es 8 —señaló feliz Camilo.

—O sea han obtenidos dos soluciones: -12 y 8 —señaló Daniel—. Ahora quiero que lean nuevamente el problema y saquen alguna conclusión.

—Profe, el valor -12, no sirve —dijo Mónica.

—¿Y por qué? —preguntó Daniel.

—Porque estamos hablando de un terreno que se mide en metros y por lo tanto debe ser positivo —respondió Mónica.

—Entonces, la solución es solamente 8 —concluyó Milena—, por lo tanto las dimensiones del terreno son 12 metros y 8 metros, como había dicho Pedro anteriormente.

—Exactamente —le confirmó Daniel—, hemos encontrado la solución para el problema de mi amigo. Lo que acabamos de resolver es una ecuación de segundo grado, cuya forma general es $ax^2 + bx + c = 0$. Ahora quiero darles un nuevo desafío: que resuelvan otra ecuación de este tipo, pero completando el cuadrado de binomio, método que los babilonios utilizaban hace más de cuatro milenios.

—Ahora sí que se "voló", señor —dijo Pedro, riendo.

Daniel anotó en la pizarra la ecuación $x^2 + 7x - 12 = 0$ y volvió a indicar que ahora quería el procedimiento a través de la formación de un cuadrado de binomio.

Durante algunos minutos hicieron los intentos posibles, hasta que Rosa dijo en voz alta que ya sabía cómo hacerlo.

—Pasa y muéstranos tu procedimiento —dijo Daniel.

—Lo primero que hice fue despejar y dejar la ecuación como $x^2 + 7x = -12$, luego sumé a los lados de la ecuación la cantidad necesaria para completar un cuadrado de binomio en el lado izquierdo, o sea $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ lo que corresponde a $\frac{49}{4}$.

La ecuación quedó $x^2+7x+\frac{49}{4}=-12+\frac{49}{4}$; transformando a cuadrado de binomio y resolviendo la suma resulta $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, se extrae raíz cuadrada a la expresión y resulta $x+\frac{7}{2}=\pm\frac{1}{2}$ y despejando x nos da que $x=\pm\frac{1}{2}-\frac{7}{2}$.

—De aquí, resulta —concluyó Rosa finalmente— que

$$x_1=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \quad x_2=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=\frac{-8}{2}=-4$$

—Excelente, Rosa, te felicito. Pero los métodos que hemos visto no son los únicos. Ahora vamos a aprender cómo se resuelve una ecuación de segundo grado, gracias a la fórmula determinada por el matemático Baskhara. Pero no crean que les voy a dar esta fórmula, sino que vamos a determinarla.

—Ya sabemos —continuó Daniel— que la ecuación tiene la forma $ax^2+bx+c=0$ donde el coeficiente a es distinto de cero.

—¿Por qué señor? —preguntó Milena.

—¿Alguien le puede responder esa pregunta a Milena?

—Porque si a tomase el valor 0, la ecuación ya no sería de segundo grado, pasaría a ser de primer grado —respondió Mónica.

—Ah, tienes razón —dijo Milena.

—A continuación —dijo Daniel—, van a seguir los mismos pasos que hizo Rosa al completar un cuadrado de binomio.

—Señor —dijo Ramón—, sería conveniente dividir todo por a.

—Pueden partir de esa manera —respondió Daniel—, pero si alguien opta por formar el cuadrado de binomio, sin dividir por a, también es posible.

Una vez que la mayoría logró determinar la fórmula, Daniel le pidió a Ramón que desarrollara el procedimiento en la pizarra.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad / : a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

—De donde se obtienen las dos soluciones de la ecuación cuadrática —finalizó diciendo Ramón.

—Muy bien, ya sabemos la fórmula que nos permitirá resolver ecuaciones de segundo grado. Ahora, corresponde aplicarla, por lo que vamos a desarrollar algunos ejercicios.

—Señor, ¿existe también una fórmula para resolver ecuaciones cúbicas?

—Sí, pero su demostración y utilización es de nivel muy complejo.

UN TARTAMUDO FAMOSO

Al día siguiente, le correspondía a Daniel clases con el tercero de formación diferenciada, o "electivo" como comúnmente lo llaman. La clase tomaría un rumbo no esperado.

—Profe. ¿Se acuerda que ayer le pregunté sobre la fórmula para resolver ecuaciones de tercer grado? —dijo Ramón.

—Sí, por supuesto —respondió Daniel

—Sé que es difícil y no está en el programa de estudio, pero igual quise investigar y encontré una historia muy interesante que me gustaría contar.

—Por supuesto, no hay problema; pasa y cuéntanos.

—La resolución de la ecuación cúbica —comenzó Ramón— fue bastante conflictiva en su tiempo; allá por el año 1537, cuando Jerónimo Cardano, en su libro Ars Magna, que es el primer gran tratado latino sobre álgebra, da a conocer la fórmula para la resolución de estas ecuaciones. Bueno, la verdad es que esta fórmula no le pertenecía, ya que su autor era Niccolo Tartaglia, quien había desarrollado una solución en 1535. Tartaglia le había pasado la fórmula a Cardano con el compromiso de que no la diera a conocer, pues Tartaglia esperaba publicarlo en su propio tratado de álgebra que estaba elaborando. A modo de anécdota —señaló Ramón—, quiero contarles que la palabra Tartaglia significa tartamudo, o sea, este gran matemático era más conocido por su apodo que por su apellido original, que era Fontana. Su problema de lenguaje venía de una herida que le propinó un soldado francés en el sitio de Brescia. Y a pesar de su fama, vivió siempre en una deplorable situación económica, mientras que Cardano, quien era un personaje egocéntrico, jugador empedernido, astrólogo y hasta hereje, disfrutó de gran fama y respeto, tanto así que el Papa le concedió una pensión. Y quizás, el gran error que cometió Cardano, por su arrogancia, fue vaticinar el día de su muerte, ya que cuando llegó ese día, para no decepcionar a sus seguidores, se suicidó. Finalmente, quiero destacar que las fórmulas de Tartaglia-Cardano estimularon el desarrollo del álgebra en el mundo.

—Gracias, Ramón —dijo Daniel—; como bien dices, y aunque no esté en los programas, es importante dar a conocer esos llamativos hechos de la historia de la matemática que hacen la clase más "sabrosa". Y fue como un llamado de atención a lo que dije ayer, al terminar la clase en el plan común.

—No fue esa mi intención, profe —argumentó Ramón.

—Pero no te asustes —dijo Daniel riendo, mientras el resto de los alumnos lo acompañaban en su risa—; lo considero un gran aporte a mi labor. Y debido al interés mostrado —continuó Daniel—, voy a darles las fórmulas que se utilizan para resolver una ecuación cúbica y vamos a solucionar un ejercicio, para que sepan cómo se trabaja con estas. Anótenlas por favor.

Y Daniel comenzó a escribir en la pizarra.

Consideremos la ecuación $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ y sean

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} \qquad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} \qquad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

La solución está dada por:

$$x_1 = S + T - \frac{1}{3}a_1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T)$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T)$$

—¡Tremenda fórmula, señor! —exclamó Mónica.

—Así es, y eso que no hemos hecho la demostración, porque es de gran complejidad y muy extensa, pero sí podemos aplicarla. Resolvamos la ecuación $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$—indicó Daniel.

Después de un largo rato, determinaron los valores de la ecuación. Todos estaban contentos por haberla podido resolver.

—Señor, ¿no hay un procedimiento más fácil? —preguntó Javier

—Bueno, podemos utilizar la Regla de Ruffini —respondió Daniel—. ¿Se acuerdan que en primero medio trabajamos con ella cuando resolvimos divisiones de polinomios?

—Sí, pero muy a la ligera, aunque algo me acuerdo —dijo Camilo.

—Resolvamos la misma ecuación con este procedimiento. Lo primero será buscar cocientes exactos al dividir por (x+6) o (x—6), ya que 6 es el término independiente de este polinomio. Recuerden que el factor se obtiene de los divisores de 6, por lo tanto, debemos ir probando por $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$ hasta que resulte resto 0 —explicó Daniel.

—El -1 da resto 0 —señaló Mónica.

—Bien —dijo Daniel—, bajen el grado de la ecuación cúbica a cuadrática trabajando con los coeficientes de la ecuación dada.

Y todos construyeron su tabla, apoyándose entre ellos para recordar lo visto en primero medio.

1	-4	1	6	-1
	-1	5	-6	
1	-5	6	0	

—La ecuación queda como $x^2 - 5x + 6 = 0$ —señaló Ramón— y al aplicar la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, obtenemos las soluciones 2 y 3. Y ya habíamos encontrado la solución -1.

—En conclusión —señaló Daniel—, las soluciones de la ecuación son -1; 2 y 3.

—Este método sí que es fácil, profe.

—Pero resultó fácil —explicó Daniel—, porque encontramos una solución por tanteo de los divisores de 6. Piense que en vez de 6 hubiese sido 140, sería un método irrealizable.

—Tiene razón, por lo tanto, la fórmula gigante sirve para cualquier caso —señaló Pedro.

—Correcto… ¿Quieren conocer la fórmula para resolver una ecuación de cuarto grado? —preguntó Daniel.

—¡Noooo! —fue la respuesta unánime.

Todos rieron ante la espontaneidad de la respuesta.

—Bueno, al menos déjenme decirles que fue Ludovico Ferrari, un matemático italiano, quien logró determinar las soluciones de una ecuación cuártica. Y también, tiene que ver con la historia que nos contó Ramón, ya que Ferrari fue discípulo de Cardano; incluso lo defendió en un debate contra Tartaglia… Bueno, eso es todo por hoy —finalizó diciendo Daniel—; aunque me pregunto, si la ecuación cuadrática está representada por una parábola, ¿qué figura representará una ecuación cúbica y una ecuación cuártica?

Y con esa interrogante final, comenzaron a salir de la sala.

VERIFICANDO Y CANTANDO A THALES

—Hoy vamos a conocer a un personaje de la matemática muy famoso —dijo Daniel.

—Pitágoras —dijeron varios.

—Han habido muchos matemáticos —señaló Daniel— que también han hecho grandes aportes a la matemática y a la humanidad en general, no sólo Pitágoras.

Daniel hizo una breve pausa.

—Uno de ellos es Thales de Mileto, conocido como uno de los siete sabios de Grecia, y que sobresale de manera especial porque sus teoremas geométricos son el punto de partida en la organización racional de las matemáticas.

—Señor —llamó la atención Esteban—, ¿qué hacían los sabios de Grecia?

—Ellos formulaban sentencias, proverbios, preceptos morales y también aconsejaban sobre asuntos políticos —respondió Daniel—. En Jonia estaba la próspera ciudad de Mileto. En ella surge la Escuela de Mileto, que para algunos es la cuna de la filosofía y la matemática griega, y cuyas figuras más ilustres son Thales y sus sucesores, Anaximandro y Anaxímenes. Thales, habría nacido en el año 624 a.C. y fallecido en el 547 a.C.; era de ascendencia fenicia e hijo de Examio y Cleobulina. A él, se le atribuye la sentencia "Conócete a ti mismo" y su respuesta a la pregunta sobre cómo debe ser la conducta de una vida justa: "Abstenerse de hacer lo que criticamos en los demás".

—No hagas lo que a ti no te gustaría que te hicieran —acotó Raquel.

—Se le atribuyen cinco teoremas geométricos y que, estoy seguro, ustedes conocen desde educación básica —dijo Daniel, mientras dibujaba—:

1º) Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por su diámetro.

2º) Los ángulos de la base de todo triángulo isósceles son iguales.

3º) Los ángulos opuestos por el vértice, que se forman al cortarse dos rectas, son iguales.

4º) Si dos triángulos tienen un lado y los dos ángulos adyacentes respectivamente iguales, entonces los triángulos son iguales.

5º) Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

—Hemos visto y ejercitado todos esos teoremas —señaló Rosa—, pero jamás nos habían dicho que eran de Thales.

—Eso es muy común que pase —expresó Daniel—; y por lo mismo, debemos ser justos con los grandes personajes de la historia de la matemática y no echarlos en el olvido.

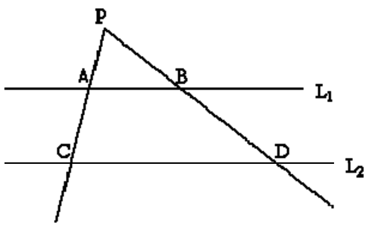
Daniel reflexionó en silencio lo antedicho por algunos segundos y continuó su clase con cierta melancolía.

—Comencemos nuestra actividad. Dibujen dos líneas paralelas y desígnelas por $L_1 y\, L_2$, agreguen otras dos líneas, con distinta inclinación, que las atraviesen y que se intersecten "fuera" de las paralelas, en un punto P.

Mientas todos cumplían con lo señalado, Daniel recorría la sala viendo que hicieran correctamente lo que se había indicado.

—Ahora designen con las letras A, B, C y D las intersecciones y midan los segmentos formados.

La figura resultó de la siguiente manera:



—Cada uno ya tiene sus medidas de acuerdo al dibujo que hicieron —indicó Daniel—. Ahora, vamos a calcular algunas razones;

desde ya, les advierto que los resultados obtenidos sólo serán una aproximación. Calculen:

$\frac{PA}{AC}$, $\frac{PB}{BD}$, $\frac{PA}{AB}$, $\frac{AC}{CD}$, $\frac{PC}{CD}$ y extraigan sus conclusiones.

—Señor —dijo Maribel—, yo obtuve que

$\frac{PA}{AC} = 0{,}8125$ y que $\frac{PB}{BD} = 0{,}80$ ¿los considero iguales?

—Sí, como ya dije, los resultados serán aproximados.

—Entonces, se podría concluir que $\frac{PA}{AC} = \frac{PB}{BD}$.

—Exactamente —corroboró Daniel.

—Yo obtuve que —señaló Esteban—:

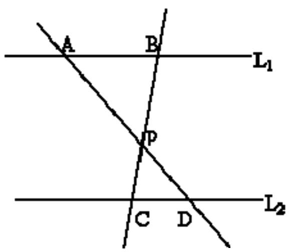
$\frac{PA}{AB} = 0{,}6842$; $\frac{AC}{CD} = 0{,}333$; $\frac{PC}{CD} = 0{,}6041$

por lo que concluyo que

$$\frac{PA}{AB} = \frac{PC}{CD}$$

—Ya hemos concluido dos proporciones, de la misma forma en que lo hizo Thales; hay otras, pero se las dejo como tarea, para que ustedes las obtengan. Ahora, vamos a considerar el caso en que las transversales se cortan entre las paralelas. Dibujen esa situación.

Nuevamente, se concentraron en sus respectivos dibujos, que quedaron así:



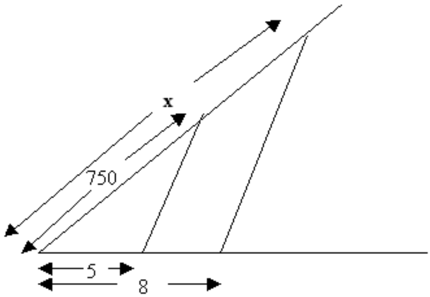
—Al igual que como hicimos con el dibujo anterior, midan cada segmento y determinen las proporciones que se cumplen en ella.

Así lo hicieron y obtuvieron algunas de las proporciones. Las restantes quedaron de tarea, igual que en la situación anterior.

—Ahora, vamos a resolver un problema muy común en nuestro diario vivir —señaló Daniel—. Aplicando el Teorema de Thales, resuelvan: si 5 kilos de papas cuestan $ 750. ¿Cuánto cuestan 8 kilos?

Esperó algunos minutos para que decidieran cómo hacerlo.

—Señor, yo hice el dibujo de esta manera. ¿Está bien? —consultó Romina, mostrando su dibujo:



—Está correcto —afirmó Daniel—. Ahora, plantea la proporción y efectúa los cálculos correspondientes. ¿Qué opinan de este procedimiento, aplicando el Teorema de Thales?

—No se me habría ocurrido una aplicación tan elemental y directa de este teorema —reconoció Lorena.

—Resuelvan con el mismo método: Si una docena de huevos vale $720, ¿cuánto valen 4 huevos? Ahora, para finalizar nuestra clase, una sorpresa —dijo Daniel—, vamos a escuchar el famoso Teorema de Thales en una canción. Este tema es interpretado por un conjunto argentino, llamado *Les Luthiers*. Les cuento un poco de su historia. En 1965, durante un festival de coros universitarios celebrado en Tucumán, Argentina, algunos integrantes de uno de los coros, presentaron un espectáculo humorístico en el que interpretaban a la perfección un concierto de música barroca, formado por solistas, coro y un pequeño conjunto instrumental. Lo interesante de ese trabajo es que lo hicieron con instrumentos creados por ellos, pero que sonaban a la perfección y eran interpretados con gran maestría por los integrantes. La actuación tuvo un impacto sorprendente, por la originalidad de la propuesta, por el alto nivel de ejecución, así como por su novedoso humor. De allí en adelante, no pararon más, siendo un suceso de la música y del humor. En la actualidad, siguen realizando actuaciones periódicas en todo el mundo.

—Yo he escuchado sus canciones —dijo Álvaro—, mi papá tiene varios CD de ellos y son muy buenos.

—Así es, son de gran calidad —corroboró Daniel—. Quiero señalarles que esta actividad, más que enseñarles matemática, pretende mostrarles lo que se puede llegar a hacer con originalidad; también espero que esto los motive a hacer sus propias creaciones. La letra y música —agregó Daniel— pertenecen a Carlos Núñez Cortés; él cuenta que tenía 19 años y cursaba segundo año de la universidad, cuando una vez, frente a un intrincado enunciado de Análisis Matemático, pensó que lo recordaría con más facilidad si le acoplaba una melodía cantable. Así lo hizo... ¡y resultó! Pensó, entonces, en ponerle música a todo un problema matemático, a todo un teorema. Entonces, fue a la biblioteca, ubicó el Teorema de Thales, y le puso música. Al día siguiente, les cantó el teorema a un grupo del coro de Ingeniería. Así, entró en *Les Luthiers*.

Y la canción comenzó a sonar ante la expectativa de todos los alumnos y alumnas:

"Johann Sebastian Mastropiero dedicó su 'Divertimento matemático opus 48', el Teorema de Thales, a la condesa Shortshot, con quien viviera un apasionado romance varias veces. En una carta en la que le dice: 'Condesa, nuestro amor se rige por el Teorema de Thales: cuando estamos horizontales y paralelos, las transversales de la pasión nos atraviesan y nuestros segmentos correspondientes resultan maravillosamente proporcionales'. El cuarteto vocal 'Les freres luthiers' interpreta: 'Teorema de Thales Opus 48' de Johann Sebastian Mastropiero. Son sus movimientos: Introducción, Enunciazione in tempo de minuetto, Hipotesis agitatta, Tesis, Desmostrazione ma non tropo, Finale presto con tutti.

Si tres o más paralelas (Si tres o más parale—le—le—las)

Si tres o más paralelas (Si tres o más parale—le—le—las)

Son cortadas, son cortadas (por dos transversales, dos transversales)

Son cortadas, son cortadas (por dos transversales, dos transversales)

Si tres o más parale—le—le—las

Si tres o más parale—le—le—las

Son cortadas, son cortadas

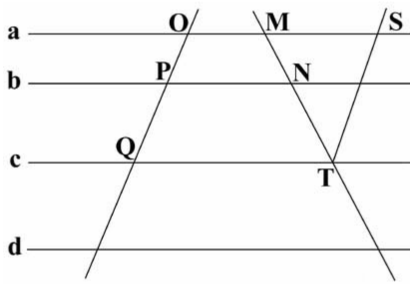
Son cortadas, son cortadas...

Dos segmentos de una de estas, dos segmentos cualesquiera

Dos segmentos de una de estas son proporcionales

A los segmentos correspondientes de la oootraaa....

Hipooooooteeeeeesiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiissss........



a paralela a b,

b paralela a c,

a paralela a b, paralela a c, paralela a d

OP es a PQ

MN es a NT

OP es a PQ como MN es a NT

a paralela a b,

b paralela a c

OP es a PQ como MN es a NT

La bisectriz yo trazaré y a cuatro planos intersectaré

Una igualdad yo encontraré... OP+PQ es igual a ST

Usaré la hipotenusa... (Ay no te compliques nadie la usa)

Trazaré, pues, un cateto (Yo no me meto, yo no me meto)

Triángulo, tetrágono, pentágono, hexágono, heptágono, octógono… son todos polígonos.

Seno, coseno, tangente y secante, y la cosecante y la cotangente

Thales, Thales de Mileto (Thales, Thales de Mileto)

Thales, Thales de Mileto (Thales, Thales de Mileto)

Que es lo que queríamos demostrar.

Que es que lo que lo que querí-queríamos demos-demos-demostrar"

Finalizó la clase y todos se retiraron, sonriendo y cantando: "Thales, Thales de Mileto…"

CIRCUNFERENCIA DE LA TIERRA

—La próxima semana, tenemos que iniciar la unidad sobre circunferencia en nuestros segundos medios —comentó Camila.

—Exactamente —corroboró Daniel—. Hoy hago la evaluación sobre fracciones en lenguaje algebraico; después, me queda una clase para entregar los resultados y revisar los ítems de la prueba tomada.

—Tengo una idea y te la quiero comentar —dijo Camila—. Me gustaría comenzar la unidad de circunferencia, repasando lo referente a perímetro y área del círculo.

—Me parece bien —apoyó Daniel—, considerando que ese contenido fue visto en 8º básico.

—Sí —afirmó Camila—, pero no quiero caer en el típico ejercicio de darles el radio o el diámetro y que ellos calculen perímetro y área, ni tampoco a la inversa.

—¿Cuál es la idea, entonces? —preguntó algo extrañado Daniel—. Yo pensé que te referías a lo que acabas de decirme.

—Bueno, en realidad también se tendrán que hacer esos cálculos, pero con problemas reales y que tengan algún significado para ellos.

—Juntémonos a las tres, aquí en el colegio, y lo planificamos; así podemos aplicarlo en nuestros cursos, a la par.

—De acuerdo —asintió Camila—. Hasta la tarde.

—Hasta la tarde —respondió Daniel.

El almuerzo fue rápido; ambos debían sumergirse en la enorme cantidad de carpetas con materiales que cada uno tenía en sus casas y que siempre los sacaba de apuro ante alguna emergencia, como la de ahora. La puntualidad era una gran virtud en ambos; los colegas y alumnos lo sabían, por lo que, siempre, trataban de no fallar al respecto. Es así que a las tres en punto, ya estaban ubicados en una sala para comenzar la tarea que habían asumido.

—Debo confesarte —inicio Daniel— que busqué entre todo el material que tengo de geometría sobre circunferencia y no hallé nada que tuviese que ver con tu idea.

—Pues a mí me pasó algo parecido —dijo Camila, haciendo causa común con él—. Todo lo que encontré tiene el esquema que quieres evitar. Parece que voy a tener que renovar mis guías.

Ambos rieron y pusieron sobre la mesa de trabajo algunos libros que podrían darles luces sobre lo que pretendían.

—Me parece importante —inició diciendo Camila— que nuestros alumnos sepan cómo se obtienen las fórmulas del perímetro y del área de la circunferencia y círculo respectivamente.

—Tendríamos que hacer alguna actividad que nos conduzca a eso —apoyó Daniel—. Yo sé que la mayoría de los alumnos sabe estas fórmulas, aunque también sé que las confunden muy a menudo; que sepan como concluirlas, no estoy muy seguro.

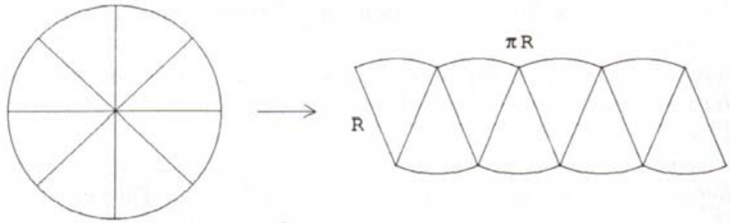
—Es importante que, en la reunión de Departamento, hablemos con Rocío y Marta sobre estas inquietudes, para que ellas trabajen en 7º y 8º básico en la misma línea que nosotros. Y lo mismo tenemos que hacer con todos los colegas que han asumido la clase de matemática este año.

—Mira Camila —señaló Daniel, con voz de duda— no sé si Marta querrá cambiar su esquema de trabajo. Después de 30 años enseñando de una manera, no creo que quiera cambiar de un día para otro.

—Bueno, tanto así no, pero tenemos que convencerla, con hechos, de que nuestros alumnos están aprendiendo mejor y que tienen un mayor interés por la asignatura, gracias al trabajo basado en sus intereses y a los contenidos contextualizados.

—Ya veremos —expresó Daniel—. Volvamos a lo nuestro.

—Podemos iniciar el tema pidiéndoles que dibujen una circunferencia y que la dividan en 8 partes iguales; que luego recorten esas partes y las unan por los radios, de la siguiente manera —y Camila hizo el dibujo rápidamente—:

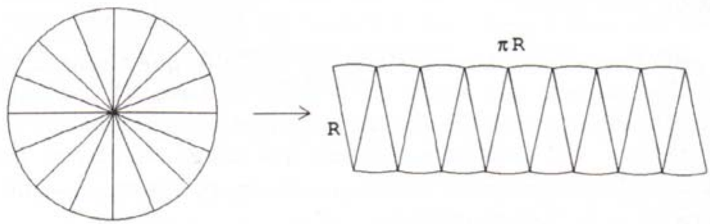


—Tienes buen pulso —bromeó Daniel.

—Obvio —respondió Camila.

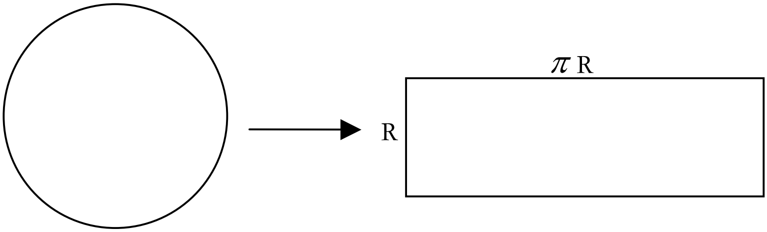
—Y después, les podemos pedir que lo dividan en 16 partes y que hagan el mismo proceso anterior —señaló Daniel.

—Exacto. Quedaría así —y Camila hizo un nuevo dibujo.



—Estoy seguro que, a esa altura, ya alguno habrá mencionado que la figura se parece a un rectángulo —señaló Daniel. Y si no es así, nosotros debemos hacer la pregunta clave: ¿qué figura se obtendrá si dividimos la circunferencia en 100 partes, en 1.000 partes, etc.? Y aclaramos que el área del círculo tiende a ser el área de un rectángulo de lados πr y r, o sea πr^2.

—Y les pedimos que, con la misma figura, determinen el perímetro de la circunferencia, para que se den cuenta que éste corresponde a la suma de los lados largos del rectángulo, sin considerar el ancho, por ser éstos radios —agregó Camila.



—Bien, ya tenemos la actividad de inicio. ¿Cuál es el paso siguiente? —preguntó Daniel a Camila.

—¿Te acuerdas del problema sobre una soga que correspondía al perímetro de la Tierra y se le agregaba otra soga, o algo así? —respondió Camila, con otra pregunta.

—¡Cierto! Ese problema es muy bueno —opinó Daniel—. Se refiere a colocar una cuerda imaginaria sobre la circunferencia terrestre, en el Ecuador, y luego cortarla y agregarle 3 metros más. El desafío es: si se coloca la soga alrededor de la Tierra, nuevamente, ¿qué espacio quedaría entre ella y la soga?

—La mayoría piensa que es tan poco lo que se agrega, que esa distancia es muy pequeña y que no pasaría ni una hoja de papel —indicó Camila.

—Recordemos la parte de cálculo —propuso Daniel—. El largo de la cuerda original es $2\pi r$, y se le agregan 3 metros. El perímetro formado por la nueva soga mediría $2\pi(r+x)$, siendo x la distancia entre la soga y la Tierra.

—Por lo tanto, puede plantearse la igualdad $2\pi r + 3 = 2\pi(r+x)$ o, lo que es lo mismo, $2\pi r + 3 = 2\pi r + 2\pi x$, obteniendo, al simplificar, que $3 = 2\pi x$ —concluyó Camila.

—Por lo tanto, la distancia x entre la soga y la Tierra es ; aproximadamente 0,47 metros, es decir, medio metro.

—Realmente es increíble el resultado que se obtiene —reconoció Camila—; incluso haciéndolo, cuesta imaginárselo. Bien, cambiemos de enfoque, vamos a la parte histórica de la matemática.

—No recuerdo algo que tenga que ver con la circunferencia —dijo, pensativo, Daniel.

—Lo que acabamos de hacer me recordó a Eratóstenes. Lo que haremos es relatarles y demostrarles de qué modo Eratóstenes determinó la longitud de la circunferencia de la Tierra —habló con firmeza Camila.

—¡Excelente! —exclamó Daniel—. Pero ¿no sería mejor que ellos lo piensen primero y nos den ideas de cómo pudo haberse hecho?

—Por supuesto —apoyó Camila—, lo conversamos y ahí vemos cómo se nos va dando la situación.

—Recordemos el método de Eratóstenes —propuso Daniel.

—Él sabía que el 21 de junio, día del Solsticio de verano en Siena, los rayos del Sol caían perpendicularmente a la Tierra, por lo que al mediodía no había sombras y los pozos quedaban totalmente iluminados por el Sol —comenzó Camila.

—Y que en el mismo momento —continuó Daniel— en Alejandría, una vara perpendicular a la superficie de la Tierra, produciría una sombra. Eso hizo Eratóstenes; enterró una vara en forma vertical, midió la longitud que sobresalía y la sombra que proyectaba, y con esas dos medidas, calculó el ángulo formado por la vara y su sombra.

—Pero aquí nos vamos a meter en una situación trigonométrica —señaló preocupada Camila.

—Pues me parece un momento propicio para enseñarles a determinar, de esa forma, medidas de ángulos usando la calculadora. Tenemos que aprovechar que van a estar motivados por la actividad.

—Tienes razón Daniel —afirmó Camila—, lo que pasa es que uno siempre piensa que los alumnos no van a poder o no van a entender y ése es un pensamiento que tenemos que sacar de nuestra cabeza. Me recuerdo muy bien que fue una de las cosas que nos dijeron en el curso que tuvimos.

—Pues yo lo he estado intentando en cada actividad que hacemos —reconoció Daniel— y ahora siento que todos pueden hacer lo que se les propone y que todos pueden aprender lo que se les entrega. Bien, continuemos.

—Eratóstenes determinó que el ángulo medía 7 grados —acotó Camila.

—Que es la misma medida que el ángulo central que subtiende el arco desde Siena a Alejandría. Sabiendo que la distancia entre ellas es de 794 km, le fue fácil a Eratóstenes calcular la circunferencia de la Tierra, considerando los 360º del ángulo central.

—En definitiva —concluyó Camila—, le dio 40.834 kilómetros.

—Bien, ya tenemos gran parte hecha. Faltaría algo relacionado con el área.

—Yo había pensado —dijo pausadamente Camila— en darles una actividad para realizar fuera de la clase. Por ejemplo, que calculen el perímetro y el área de los círculos y semicírculos que tienen las canchas de básquetbol y fútbol.

—Sí, me parece muy buena idea. Busquemos otras posibilidades y, en los próximos días, nos ponemos de acuerdo en lo que vamos a incluir en el trabajo.

—De acuerdo —dijo Camila—. Ahora me voy porque tengo que llevar a Diego al cumpleaños de un compañero de curso. Hasta mañana.

—Hasta mañana —respondió Daniel— y se quedó pensativo sobre las actividades planificadas y su nuevo quehacer pedagógico.

LA FIESTA DE LOS PRIMOS

—¡Profe, profe! —gritaban Nicol y Andrés, mientras corrían hacia Daniel.

—Qué pasa, ¿ocurre algo? —preguntó Daniel, preocupado.

—No se alarme profe —dijo Nicol—, lo que pasa es que en dos semanas más debemos mostrar una obra teatral para la asignatura de lenguaje y nos pidieron que sea novedosa, ojala inédita.

—Y la profe Marta —continuó la explicación, Andrés, tomando aire— nos contó que usted había escrito una obra teatral de matemática.

—Sí, pero hace muchos años —comentó Daniel.

—Igual nos gustaría hacerla; además, sería una gran primicia para todos saber que nuestro profesor de matemática también es escritor —señaló Nicol, tratando de convencer a Daniel.

—Está bien, yo les traigo el libreto. Pero si no les agrada, simplemente no la hagan; no voy a molestarme por ello —dijo Daniel.

—Excelente profe. Y ¿cuándo lo puede traer? —preguntó Andrés.

—Mañana. Sólo tengo que imprimirlo, ya que la tengo escrita en el computador.

—Ya, profe, no se olvide y gracias por el favor —dijo Nicol y se retiraron los dos, para variar, corriendo.

Aquella tarde, lo primero que hizo Daniel fue buscar el libreto para imprimirlo, pues no le gustaba fallarles a los alumnos en lo que prometía. Una vez que lo encontró, comenzó a leerlo y a cambiar algunos detalles para mejorarlo. El título era "La Fiesta de los Primos".

El libreto comenzaba con la indicación de que bastaban unas túnicas con un gran número marcado para los personajes y una escenografía, con algunos elementos matemáticos, para llevarla a cabo. Y decía:

PRIMERA ESCENA

9: Hola 2, ¿vas a ir a la fiesta de los primos?

2: Por supuesto, si yo soy primo.

9: No lo pareces mucho, además no me cuadra, porque tú eres un número par y los primos no pueden ser pares.

2: Pues allí te equivocas. Yo soy primo y para tu información soy el único par y el más pequeño de todos los primos positivos.

9: Está bien, pero no te enojes, sólo era un comentario. ¿Y por qué hacen fiesta? ¿Se celebra algo?

2: Por supuesto. Tú sabes que mi familia no es tan numerosa, comparada con otras familias numéricas, y hemos hecho lo posible por ubicar a todos los parientes primos que andan por el mundo.

9: Me parece muy bien lo que hacen.

2: Gracias. Es así que la semana pasada descubrimos un nuevo pariente que vive por allá en los Estados Juntos.

9: Estados Unidos será.

2: Eso mismo. Se llama $2^{25.964.951}-1$ y es de una rama de nuestra familia, los Mersenne.

9: Y obviamente la fiesta es en su honor.

2: Así es, y esperamos que él nos dé información para ubicar a otros parientes lejanos que seguramente tenemos. Y hablando de parientes, mira, allí viene el primo Malasuerte.

13: ¡Qué mala suerte! ¡Me dan ganas de llorar!

2: ¿Qué te pasa primo, que vienes quejándote?

13: Fui a un concurso de televisión y me perdí un millón de pesos por no saber una sola pregunta.

9: ¿Y qué pregunta era?

13: Preguntaron por el día que nadie se quiere casar ni embarcar y yo no supe qué decir.

2: Pero si es el martes 13.

13: Después me acordé, ¡qué mala suerte tengo! Pero cambiemos de tema mejor, ¿de qué estaban hablando?

9: De la fiesta de los primos que se hará el sábado y a la cual yo no estoy invitado.

2: Querido amigo, tú te pareces mucho a un primo, incluso algunos creen que lo eres, pero no es así y esta fiesta es exclusiva.

13: Yo recuerdo las fiestas de antes. Encontrábamos un nuevo pariente e invitábamos a todos los números a celebrar.

9. ¿Y por qué dejaron de hacerlo?

2: Por muchas situaciones que nos colmaron la paciencia y que desprestigiaban nuestra fiesta. ¿O tú 9, no te acuerdas?

9: Bueno, una caída la tiene cualquiera.

13: Me parece que fue más de una caída.

2: Si pues, te tomabas unos tragos y al rato ya andabas por el suelo, patas arriba. ¿No es cierto, Malasuerte?

13: Así es, lo peor era que confundías a todos con tu extraña postura, muchos pensaban que eras el 6 y no el 9 al verte.

2: Imagínate los problemas de dislexia que habrás provocado.

9: Ya no me reten más. Estoy arrepentido y ahora sólo tomo juguito de naranja.

13: Espero que no sea con relleno de Vodka.

9: Ya se pusieron pesados, mejor me voy. A ver si puedo organizar una fiesta con mis amigos, los números compuestos. Que lo pasen bien y saludos al primo gringo.

2: Chao.

13: Chao nueve y cuídate.

2: Me da pena que no puedan asistir todos los números a nuestra fiesta, pero sabemos que no todos se comportan como deben.

13: Tranquilo, no le des más vueltas. Estos últimos años lo hemos pasado súper bien y no hemos tenido problemas, como el que tuvimos con 666, ¿te acuerdas?

2: Por supuesto, se fumó unos pitos y después andaba diciéndoles a todos que él era el diablo.

13: ¡Qué tonto! ¿Quién le iba a creer semejante burrada?

0: ¡Hola! ¿Cómo están?

2: ¡Me asustaste! No te vi llegar.

0: Perdona, pero al conjunto vacío puede que no lo veas, pero a mí…

13: En realidad no es difícil verte. Estás bastante gordito, una dieta no te vendría mal.

0: Oye Malasuerte, preocúpate por lo tuyo no más, mira que mañana es martes y nadie te quiere ver por aquí.

13: ¡Ya me acordé del concurso otra vez! Mejor me voy, además que se puso denso el ambiente. Nos vemos el sábado en la fiesta, 2.

0: ¿Fiesta? ¿Qué fiesta?

2: La de los primos.

0: ¿Y me podrías hacer pasar como primo, para poder ir?

2: Imposible, es una fiesta privada y no queremos que ocurra lo de fiestas anteriores.

0: Bueno, ustedes se lo pierden. Hola, querido amigo Pi.

π: Hola muchachos, ¿supieron la última novedad?

0: ¿Descubrieron un alimento nuevo?

2: Tú siempre pensando en comer.

π: Van a hacer una película sobre mi vida.

2: ¡Qué genial! Te felicito.

0: Apuesto que ahora que vas a ser famoso te van a invitar a la fiesta de los primos.

π: No creo, yo soy un irracional, no un primo.

0: Para qué voy a discutir. Me dio el hambre. Chao, nos vemos.

π: Parece que se fue enojado.

2: Es porque no lo invitamos a la fiesta. Lo que pasa es que la última vez que fue, armó un tremendo escándalo y lo tuvimos que echar. Y como andaba con un cinturón muy apretado, todos lo confundimos con el 8.

π: No sabía esa historia.

2: Y luego se puso a dormir sobre el techo del auto de uno de nuestros invitados y nadie lo podía despertar. Lo peor es que nuevamente lo confundimos, ahora con el infinito.

2: Los primos estuvimos mucho tiempo sin hablarle al 8 ni al ∞ hasta que se supo la verdad. De ese momento lo declaramos persona no grata en nuestras fiestas.

π: Me parece lo correcto.

2: Pero cuenta sobre tu película, ¿Quiénes van a actuar?

π: Según la noticia Brad Pitt y Angelina Jolie.

2: ¡Guau! ¿En serio?

π: Por supuesto, será una gran producción.

2: Vamos a contarle a todos los números entonces y lleva un lápiz por si tienes que firmar autógrafos.

SEGUNDA ESCENA

(En la fiesta, adornar con globos y serpentinas)

7: Hagamos un brindis por el primo $2^{25.964.951}-1$

2: Que su estadía sea muy grata y placentera.

$2^{25.964.951}-1$: Thank you, I'm very happy.

Todos: ¡Salud!

3: Está muy guapo el primo.

11: Alguien golpea a la puerta.

2: Voy a abrir.

1: Buenas noches a todos.

2: Disculpa, pero esta es una fiesta privada sólo para primos.

1: ¿Y quién dice que no soy primo?

11: Mi tatarabuelo nos contó los inicios de nuestra familia y en ella jamás te mencionaron.

1: Disculpa, pero yo traigo pruebas de que sí soy primo. Mira este libro de Aritmética, lo usan en todos los colegios y lo escribió un matemático de apellido Baldor. En la página 197 sale parte de la familia de los primos y yo estoy incluido.

2: Ese libro es muy antiguo y los nuevos estudios de parentesco señalan que yo soy el menor número primo que existe.

1: ¿Y cómo llegaron a esa conclusión?

7: Porque nuestra familia está compuesta por los enteros positivos, que únicamente se pueden dividir por sí mismo y por 1, o sea tenemos dos divisores.

1: Yo cumplo con eso

2: Estás equivocado, a ti te divide solamente el 1 y nadie más. A mí me divide el 1, pero también yo mismo, o sea, el 2.

7: Y a mí me divide el 1, pero también el 7

11: Y a mí el 1, el 11 y nadie más. Toda nuestra familia tiene dos divisores distintos, tú tienes sólo uno.

1: No lo había pensado de ese modo.

2: Pero no te pongas triste.

1: Es que acabo de ir a una fiesta que organizaron los números compuestos. Ellos no son primos y pensé que allí me admitirían, pero también me rechazaron.

2: Bueno, si decides comportarte yo creo que por esta vez podemos hacer una excepción y admitirte, siempre y cuando reconozcas que no eres un primo.

1: Sí, lo reconozco. Yo soy un simple impar, aunque igual algo de sangre común corre por nuestras venas.

7: Ya, no insistas. Adelante 1, pasa y disfruta de la fiesta.

1: Muchas gracias a todos. No olvidaré este gesto.

2: Ya gemelo, vamos a bailar.

1: ¿Por qué le dices gemelo?

2: Porque todos los primos que tenemos 2 unidades de diferencia, somos gemelos.

1: ¿Y hay más gemelos?

2: Por supuesto. Por ejemplo el 5 y el 7 lo son, también el 29 y el 31.

1: ¡Que interesante!

Y la fiesta continuó hasta altas horas de la madrugada.

EL CALCULISTA

—Señor, ¿vio anoche, en el programa del Rafa, al calculista más rápido del mundo? —preguntó Milena.

—Sí, por supuesto —dijo Daniel—; cuando supe que iba a participar en el programa, dejé preparado mi video para grabarlo, ya que me puede servir en alguna clase.

—¿Y usted sabe cómo lo hace? —consultó Mónica.

—Es obvio que tiene una gran habilidad matemática y mucho entrenamiento; esto le permite resolver en un tiempo ínfimo lo que a los demás nos cuesta sus buenos minutos. Seguramente, cuando era niño o joven, se aficionó a los cálculos rápidos, basados en los miles de métodos que sirven para esa finalidad.

—¿Y esos métodos, los enseñan en el colegio? —preguntó Camilo—. Porque no recuerdo ninguno.

—Buena pregunta, Camilo, y la respuesta es que, lamentablemente, son muy pocos los profesores que enseñan el cálculo rápido. Sé que esto haría que la matemática fuese más fácil y entretenida, pero también quiero justificarlos; probablemente, a muy pocos de ellos les enseñaron esas técnicas durante su preparación para profesor —concluyó Daniel.

—¿Profe, nos podría enseñar algunos trucos? —dijo Milena con voz de ruego.

—Sí, señor —apoyaron varios.

—Está bien. Comencemos con algunos que son bastante elementales y que, de seguro, ustedes utilizan. Cuando multiplican números que terminan en cero, por ejemplo 20 por 30, efectúan $2 \cdot 3$ y luego agregan los ceros, con lo que obtiene 600 como resultado. Lo mismo pasa cuando tienen que dividir números terminados en cero, como 600 dividido 50; eliminan la misma cantidad de ceros, para terminar dividiendo 60 con 5, lo que da 12.

—Siempre hago eso, pero no lo había considerado como una estrategia de rapidez matemática —opinó Rosa.

—Así es, y también los he visto, en algunas oportunidades, aplicar algunas técnicas cuando multiplican o dividen decimales —comentó Daniel. Por ejemplo, cuando deben multiplicar 0,7 por 0,8, resuelven primero 7 ·8 y después colocan la coma en el lugar correspondiente, dándoles 0,56 como resultado; pero al mismo tiempo, he visto a algunos multiplicando 0,3 por 0,3 y colocar como resultado 0,9 que es incorrecto. Con esto, quiero decir que la rapidez en cálculo debe ir acompañada de habilidad y lógica matemática para evitar cometer errores garrafales.

Daniel Siguió enseñando otras técnicas durante la clase.

—Un cálculo que puede hacerse rápidamente es multiplicar por 4 o por 40 o por 0,4 etc. Considerando que 4 significa dos veces 2, para multiplicar, por ejemplo, 52 por 4, sólo tenemos que doblar 52 resultándonos 104 y luego doblar este último para obtener, finalmente, 208. Siempre va a ser más fácil y rápido doblar dos veces una cantidad, que intentar multiplicar directamente por 4. En el caso de multiplicar por 40, también se usa el doblaje, agregando el cero del 40 al final.

—También lo podemos aplicar a la inversa —dijo Pedro—; cuando nos pidan dividir por 4, podemos sacar la mitad del número y luego la mitad de la mitad.

—¡Muy buena conclusión, Pedro! Esos detalles son los que llevan a algunas personas a ser tan hábiles en efectuar cálculos matemáticos.

—Los casos que hemos visto no son tan difíciles y se pueden aprender, pero el calculista determinaba hasta raíces quinta de un número —dijo Ramón.

—Ustedes vieron que este personaje le pasó una calculadora a alguien del público y le pidió que multiplicara un número cinco veces, el que ella quisiera. Una vez que la persona obtuvo el resultado y se lo dio a conocer, él dijo que iba a calcular la raíz quinta de ese número, es decir, iba a determinar el número inicial con el que la persona hizo cinco veces el producto. Parece muy difícil, pero no es así. Haga uno de ustedes el producto de un número 5 veces y me lo dice.

—Ya lo hice, me dio 32.768 —dijo Javier.

—Excelente; y me bastan sólo 2 segundos para responder que la raíz quinta de 32.768 es 8.

—¡¿Cómo lo hizo?! —exclamaron todos.

—Profe, podría ir al programa del Rafa —dijo Mónica.

—No es para tanto —respondió Daniel sonriendo—. Les explico: basta con darse cuenta de lo siguiente: 1^5 es 1, 2^5 es 32, 3^5 es 243, 4^5 es 1.024, 5^5 es 3.125, y así hasta llegar a 9^5 que es 59.049; el último dígito de cada número obtenido, es igual al número que fue multiplicado cinco veces. Esto quiere decir que, para sacar la raíz quinta, al calculista le bastó con saber en qué dígito terminaba el número.

—O sea que la raíz quinta de 59.049 es 9 porque el número termina en 9. ¡Soy un calculista! —exclamó Camilo, orgulloso de su logro.

—La otra operatoria rápida que les recomiendo aprender —dijo Daniel—, es el producto por 5. Para realizarlo, lo que deben hacer es dividir el número dado por dos y, luego, agregarle un cero; en el fondo, lo que estamos haciendo es transformar el 5 en $\frac{10}{2}$. Por ejemplo, para resolver 284 por 5, primero determinamos la mitad de 284, que es 142, y le agregamos un cero, resultando 1.420. Pueden hacer lo mismo si el producto es por 50, por 500, etc. agregando la cantidad de ceros correspondientes. Otro cálculo rápido —prosiguió Daniel—, y que les puede gustar, es determinar los cuadrados de números terminados en 5, como 75 por 75 ó 75^2.

Daniel hizo una pausa ante la expectativa de todo el curso.

—Estos productos siempre terminan en 25 y, para determinar los dígitos anteriores al 25, basta con multiplicar el primer dígito del número dado por su sucesor; es decir, multiplicamos el 7 por su sucesor, el 8, y el resultado es 56. En conclusión, 75^2 es 5.625.

—Ese me gustó, profe —reconoció Milena—, o sea, si tengo que calcular 35 por 35, multiplico 3 por 4 que da 12 y le agrego el 25, o sea 1.225.

—Y 85 por 85 es 8 por 9 que da 72, agregando el 25 resulta 7.225, ¡qué genial! —exclamó Ramón.

—¿Conoce otro, señor? —preguntó Doris, que generalmente no consultaba en clases, pero que ahora parecía motivada con el tema.

—Hay algunos procedimientos de cálculo basados en los productos notables; por ejemplo, para calcular el cuadrado de 51, hacemos lo siguiente: $(51)^2 = (50+1)^2$ desarrollamos el cuadrado de binomio obtenido y resulta

$$50^2 + 2\cdot 50\cdot 1 + 1^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$$

que, practicándolo en forma continua, se hace fácil y muy útil. Otro procedimiento, tiene que ver con la suma por su diferencia; por ejemplo al tener que calcular:

$$28^2 - 25^2 = (28+25)(28-25) = 53\cdot 3 = 159$$

con lo que ahorramos tiempo y hay menos posibilidades de equivocarse al trabajar con números más pequeños.

—Está entretenido señor, podría darnos otro —dijo Javier.

—Es muy conocido el producto de un número de dos dígitos por 11 —le comentó Daniel—; para ello, se escribe el número que va a ser multiplicado por 11 dejando un espacio entre ellos, donde se coloca la suma de los dígitos del número. Por ejemplo, 35 por 11 es igual a 3__ 5. ¿Se dan cuenta que dejé un espacio entre ellos? Pues allí, va la suma de los dígitos 3 y 5, o sea 8. En conclusión, el producto final es 385.

—Entonces, 27 por 11 es 297 ya que coloqué 2 + 7 entre el 2 y el 7 —dijo Doris.

—Así es —respondió Daniel—. Ya hemos aprendido bastantes trucos para mejorar la rapidez en el cálculo. Piensen que, si hubiesen estado practicando esto desde niños, su nivel estaría a la altura del famoso calculista que han visto.

—Y estaríamos en la tele —agregó Milena, causando risas en sus compañeros.

Sonriendo, los alumnos y Daniel abandonaron la sala.

COLÓN Y LA MESA

La clase sobre la circunferencia y el círculo se dio tal como lo habían planificado Camila y Daniel. Seguramente, a los alumnos y alumnas, nunca más se les olvidaría cómo obtener las fórmulas de perímetro y área. Incluso, se volvió a recordar la forma de obtener el valor de π como parte de la clase; por suerte, nunca falta la pregunta que rompe esquemas.

—Señor —llamó Romina algo pensativa—; en la clase pasada, vimos la forma en que Eratóstenes determinó el perímetro de la tierra. Bueno, ahora, tengo una tremenda duda existencial —y sonrió.

—Dime —dijo Daniel.

—Si en el año 1492, Colón probó que la Tierra es redonda… ¿Cómo Eratóstenes calculó su perímetro en el año 250 a.C., si en ese tiempo se pensaba que la Tierra era plana?

—Muy buena pregunta, Romina; eso tiene una explicación —señaló Daniel.

—¿Y cuál es, señor? —preguntó Romina.

—Aristóteles —comenzó explicando Daniel—, alrededor del año 330 a.C., había llegado a la conclusión de que la Tierra era redonda, porque la sombra que proyectaba sobre la luna, durante los eclipses solares, era circular. Y como ya vimos, Eratóstenes calculó su perímetro; y no sólo él, ya que, posteriormente, otros científicos también lo hicieron. Desgraciadamente, por muchos siglos, el oscurantismo proveniente de la interpretación literal de la Biblia, hizo desaparecer gran parte de los conocimientos científicos que se tenían, e incluso, se llegó a perseguir a las personas que intentaban explicar racionalmente las observaciones sobre la Tierra. Para ser más preciso, alrededor del año 300 d.C., la Iglesia declaró absurda y herética la creencia en una Tierra esférica y la existencia de antípodas, o puntos opuestos de la Tierra.

Cuando Cristóbal Colón planteó la idea de llegar a las Indias —continuó Daniel—, navegando hacia el oeste desde España, ya sabía que la Tierra era redonda. Y no solo él; la mayoría de los europeos, con cierto nivel de educación, creían que el mundo era esférico. Por lo tanto, hay que tener claro que la elite española no se oponía a Colón porque pensara que se caería del borde de la Tierra; más bien, pensaban que él había subestimado el tamaño de la tierra y que nunca podría navegar tan lejos a mar abierto. La Iglesia —finalizó Daniel— sólo se rindió a la evidencia cuando Sebastián Elcano y sus diecisiete compañeros volvieron de la primera vuelta al mundo, sanos y salvos. Ese fue uno de los puntos importantes que llevaron a una disminución del poder represivo de la Iglesia a finales del siglo XVII, lo que permitió nuevamente la libre expresión del pensamiento humano.

—Señor, ¿y de dónde sacó usted toda esa información? —preguntó, extrañada, Maribel.

—Investigando, leyendo, viendo esos programas culturales que ustedes se saltan cuando hacen zapping —dijo sonriendo—. Bien, sigamos.

—Tengo otra consulta señor —llamó la atención Esteban.

—Sí, dime —dijo Daniel.

—Mi pregunta viene de una situación, quizás ridícula, pero cierta —expresó Esteban.

—Cuéntanos, veamos de qué se trata —dijo Daniel.

—Hace unos días —comenzó Esteban su relato—, me junté con unos amigos a jugar cartas y en algún momento alguien me dijo que se dejaban en el centro de la mesa y no a un lado. Como broma, le dije: "y cómo voy a saber dónde está el centro de esta mesa si es redonda; tendría que tener un compás gigante". La respuesta de mi amigo me dolió en el alma, ya que me dijo riendo: "me extraña que, siendo tan buen matemático, no sepas eso". No hice ningún comentario más, pero quedé con esa duda y me gustaría que la pudiésemos aclarar ahora.

—Perfecto, Esteban, pero me gustaría que, primero, ustedes lo intentaran y tal vez les pueda servir alguno de los teoremas vistos la clase pasada. Dibujen la situación planteada en su cuaderno y les daré un tiempo para que puedan solucionarlo.

Todos comenzaron a emitir opiniones y trazar diversas líneas en las circunferencias. Después de algunos minutos, Sofía señaló a todos que había encontrado la solución.

—Pasa, Sofía, y explícanos cómo obtuviste la respuesta.

Sofía hizo una gran circunferencia en la pizarra y explicó:

—Lo que hice fue trazar en la circunferencia dos rectas secantes y luego las rectas perpendiculares a ellas en su punto medio.

—¿Qué nombre reciben esas perpendiculares? —interrumpió Daniel.

—Simetrales —respondió Sofía.

—Correcto —confirmó Daniel.

—La intersección de estas —continuó Sofía— me dieron el centro de la circunferencia, que es lo que estábamos buscando.

—Muy bien, ¿aclarada tu duda Esteban? —preguntó Daniel.

—Sí señor, muchas gracias.

—También quiero comentarles —agregó Daniel— que la circunferencia tiene otras aplicaciones: los ángulos que se forman dentro y fuera de una circunferencia son muy útiles para el diseño de diferentes mecanismos como, por ejemplo, el de una polea convertida en rueda excéntrica. Además —siguió Daniel—, cuando los ingenieros diseñan torres de antenas, necesitan saber qué fracción de la superficie de la Tierra cubrirá la señal de radio de la torre. Si se conoce la medida del ángulo formado por la punta de la torre y los rayos tangentes al círculo, se puede encontrar la fracción de la circunferencia cubierta por las señales de radio y la distancia que cubren dichas señales.

—Ahí sí que se ve una aplicación cierta de la circunferencia —dijo Lorena.

—Y hay muchas más, pero ahora debemos continuar con las actividades propuestas durante la clase pasada —finalizó diciendo Daniel.

LA BANDERA Y SU ESTRELLA SOLITARIA

Llegó septiembre y, en todos los colegios del país, se iniciaron las actividades relacionadas con las Fiestas Patrias, más popularmente conocidas como "El 18".

Era habitual que las labores de este mes estuviesen relacionadas con los sectores de Lenguaje, Historia, Arte y Música; eso llevó a Camila y Daniel a esforzar al máximo su imaginación, con el fin de poder desarrollar alguna actividad relacionada con la matemática para tan importante festejo.

—¿Y, Camila? ¿Se te ocurrió algo? —preguntó Daniel.

—Aún no he encontrado ninguna relación.

—Yo tengo una idea que puede ser interesante; en el recreo te cuento.

Llegó el esperado momento del café, instante muy apetecido por profesores y profesoras, para poder recuperar energías y renovar la garganta para seguir en clases. Mientras Camila endulzaba su café con sacarina, Daniel extraía de su bolso algunos apuntes hechos a mano y los acomodaba en la mesa, esperando que Camila terminara su diario ritual para contarle sobre su idea.

—Listo —dijo Camila, sentándose al lado de Daniel.

—Es una actividad que podemos realizar con tercero y cuarto medio de la Formación Diferenciada —comenzó explicando Daniel—. El título puede ser "La bandera chilena y su estrella solitaria". La idea es analizar matemáticamente nuestra bandera nacional. Determinar sus medidas, las áreas de división y, principalmente, las medidas de la estrella, donde el trabajo iría desde los decimales hasta las funciones trigonométricas. ¿Qué te parece?

—Espectacular —dijo Camila—, jamás he escuchado que se haya hecho un análisis de ese tipo, por lo que sería súper motivante ser los primeros en realizarla.

—¡Qué bueno que te haya gustado la propuesta! —exclamó Daniel, feliz del apoyo encontrado en su compañera de trabajo—. Y eso no es todo; la idea es incorporar elementos de historia y lenguaje. Para eso, tendremos que pedirles cooperación a los colegas de esas asignaturas.

—Aprovechemos la reunión prevista para el viernes, para organizar las actividades del "18" y planificar el trabajo con los colegas.

—De acuerdo —respondió Daniel.

Era la primera vez que se juntaban los sectores de Matemática, Lenguaje e Historia para elaborar una actividad académica. Todos estaban impacientes por conocer la propuesta de Daniel; por esa razón, los pocos minutos utilizados para explicar en qué consistía la actividad, bastaron para interesar mucho a sus colegas, quienes de inmediato comenzaron a aportar ideas al trabajo.

—Sugiero que se trabaje el poema "Al pie de la bandera" de Víctor Domingo Silva —señaló Karen. Es un poco largo, pero muy hermoso y tiene un comienzo espectacular que dice:

"¡Ciudadanos!
¿Qué nos une en este instante, quién nos llama,
encendidas las pupilas y frenéticas las manos?
¿A qué viene ese clamor que en el aire se derrama
y retumba en el confín?
No es el trueno del cañón;
no es el canto del clarín;
es el épico estandarte, es la espléndida oriflama,
es el patrio pabellón,
que halla en cada ciudadano un paladín."

—Estupendo —señaló Camila—; tienes que pasarnos el poema completo, para que lo leamos, y también las actividades que podemos realizar con él.

—Sí, no hay problema —dijo Karen—; el lunes se los hago llegar.

—La parte histórica es muy importante para lo que se va a hacer —acotó Rafael profesor de Historia y Geografía—, ya que hay una relación muy directa entre la bandera y la matemática, aunque parezca extraño. Les explico… La forma de la bandera chilena fue establecida el 18 de octubre de 1817, por decreto de Bernardo O´Higgins y su diseño es obra del ingeniero militar Antonio Arcos, quien llegó a Chile con el Ejército Libertador de Los Andes. Según el diseño del mismo Arcos, se compone de dos secciones horizontales que se dividen por la mitad de su ancho. La superior, o sea la franja blanca, en dos tercios de su largo y azul en su tercera parte, inmediata al asta, con una estrella blanca de cinco puntas en el centro del cuadro azul, cuyo diámetro es igual a la mitad de ese cuadrado. La sección inferior es la franja roja.

—¡Qué estupendo! —señaló muy contento Daniel—. Ahí ya tenemos un buen punto de partida para la unión de nuestros sectores.

—Exactamente —acotó Rafael y prosiguió—. Es importante recordarles lo visto en básica, respecto del significado de los colores y de la estrella, con el fin de que se apropien al máximo de la actividad. Recuerden que el color rojo de la bandera simboliza la sangre derramada por la libertad de la patria, el blanco la pureza y majestad de sus altas y nevadas montañas, el azul la bondad y claridad de su cielo y, la estrella solitaria, su condición de república unitaria.

—Tengo otro aporte que puede servirles —expresó Marcos, también profesor de Historia y Geografía—. En 1941, por la conmemoración de los 400 años de la fundación de Santiago, Japón obsequió a Chile una bandera chilena gigante de 30 metros de largo. La confección la realizaron 100 obreros nipones y fue terminada en 125 días, empleando en ella, 250 kilos de seda.

—¡Excelente! —no daba en sí Daniel—; allí podremos incorporar la proporcionalidad y semejanza.

Siguieron conversando por un tiempo más; luego, Daniel y Camila se reunieron para comenzar a planificar, en todos sus detalles, la actividad. Analizaron en qué sala trabajarían, con qué cursos, los profesores de apoyo que deberían tener, los implementos que los alumnos deberían llevar ese día y muchos detalles más. Luego, esbozaron algunas preguntas que servirían para el desarrollo del trabajo.

—Una buena actividad —dijo Camila— sería que, basados en los decretos que establecieron las medidas oficiales de nuestro emblema patrio, los alumnos determinen el ancho de la bandera obsequiada por Japón.

—Y basados en lo mismo, podemos plantearles algunos problemas como, por ejemplo: Si en la confección hubiesen participado 250 japoneses, en las mismas condiciones de trabajo, ¿Cuántos días habrían demorado en terminarla? —aportó Daniel.

—Y yo agregaría: Si la confección hubiese sido hecha por un solo nipón, en las mismas condiciones de trabajo, ¿Cuántos días habría demorado en terminarla?

—A esas preguntas, debemos sumar algunas correspondientes a perímetros y áreas y, por supuesto, sobre la estrella.

Siguieron trabajando en forma entusiasta, al punto que, esa misma tarde, ya habían terminado la mayoría de las preguntas que guiarían la actividad. Camila las leyó:

Determina la razón entre los perímetros del cuadrado que contiene la estrella, del rectángulo blanco y del rectángulo rojo.

Determina, ahora, la razón entre las áreas de las figuras anteriores.

¿Cuánto mide el radio AO de la estrella?

Señala el nombre de la figura FGHIJ y determina la medida de sus ángulos interiores.

¿Qué tipo de triángulo corresponde a las puntas de la estrella de la bandera chilena? ¿Cuánto miden sus ángulos interiores?

¿Cuánto mide la altura AK del triángulo AFJ?

Calcula el área de cada punta de la estrella.

Calcula el área del pentágono interior de la estrella.

¿Cuál es el área total de la estrella?

Calcula el área de la superficie azul.

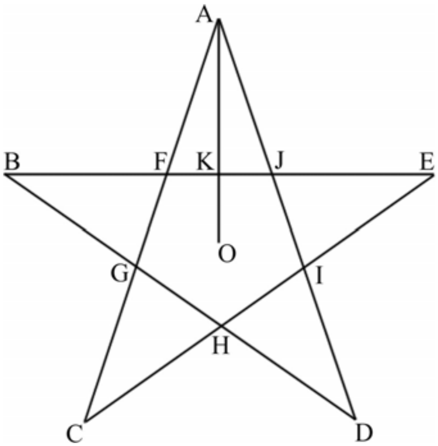
Determina el perímetro y el área de la circunferencia circunscrita a la estrella.

Traza todas las diagonales de FGHIJ. ¿Cuántas son? ¿Qué figura forman?

¿En qué razón están los perímetros de la estrella original y la nueva estrella formada? ¿Y sus áreas?

Si efectuáramos el proceso anterior 5 veces, ¿cuánto mediría el perímetro de la última estrella dibujada? ¿Y su área?

DESAFÍO: Determina las medidas de una bandera chilena, sabiendo que el radio de la circunferencia circunscrita a la estrella mide 10 cm.



La actividad resultó todo un éxito; los profesores de los otros sectores se comprometieron, con Daniel y Camila, a seguir trabajando en conjunto. Incluso, profesores de otras áreas se ofrecieron para ser un aporte a este tipo de actividades. Camila y Daniel se sintieron muy felices y orgullosos cuando el Director del colegio los felicitó por la iniciativa y los destacó públicamente como ejemplo de las nuevas formas de hacer educación.

Stand and Deliver

—Estimados colegas —comenzó diciendo Camila—. La reunión de Departamento de hoy, tendrá un formato distinto al habitual. En primer lugar, veremos la película "*Stand and Deliver*", basada en la historia del profesor de matemáticas de origen boliviano Jaime Escalante, quien se convirtió en uno de los educadores más famosos de Estados Unidos, debido a su éxito con estudiantes latinos en la secundaria Garfield de California. Después de un café, hablaremos sobre la película y extraeremos algunas ideas que podrían ser aplicables a nuestro quehacer pedagógico. Mientras termina de instalarse el equipo, quiero comentarles que esta película fue realizada en el año 1988 y su Director se llama Ramón Menéndez. El actor que hace el papel del profesor Jaime Escalante es Edward James Olmos, quien por esta actuación, fue nominado al Oscar como mejor actor ese mismo año. La película es del género drama y tiene una duración de 105 minutos.

—Ya estamos listos —señaló Daniel—. Vamos con el video.

Una vez finalizada la película, y después de un renovador café, se reunieron las nueve personas que componen el departamento de matemática del colegio. Camila, que fue quien preparó esta reunión, se dirigió nuevamente a los asistentes.

—Antes de entrar a los comentarios y análisis de la película, Daniel les va a dar a conocer algunos aspectos biográficos de la vida del profesor Jaime Escalante, a quien conoció personalmente cuando estuvo de visita en nuestro país.

—Como bien señalaba Camila al inicio de la reunión —comenzó a relatar Daniel—, el profesor Jaime Escalante nació en La Paz, Bolivia, donde enseñó Física y Matemática durante 14 años. En 1964, decidió inmigrar a Estados Unidos, pasando previamente por Puerto Rico, donde tomó algunos cursos de ciencia y matemática. Luego, se trasladó a California, donde se encontró con la gran dificultad de no saber hablar inglés y de no contar con los documentos que lo habilitaban para hacer clases...

Los profesores escuchaban la breve biografía relatada por Daniel, aún impactados por la película.

—A pesar de esto —continuó Daniel—, decidió seguir adelante, estudiando electrónica; luego siguió estudiando para obtener el título en matemática. Todo esto mientras trabajaba por las mañanas para mantenerse. Fue así como logró un puesto como profesor en la escuela secundaria Garfield en California, famosa por el consumo de drogas y la violencia estudiantil. Allí, logró motivar a algunos estudiantes para rendir el examen de cálculo AP del año 1982. Por la película que acabamos de ver, ya sabemos que esos exámenes fueron invalidados, porque se creyó que los alumnos habían hecho trampas. La mayoría volvió a hacer el examen, aprobándolo y convirtiendo al profesor Escalante en un héroe nacional. En el año 1991 —siguió Daniel—, deja la escuela, argumentando celos por parte del profesorado y se fue a trabajar a Sacramento. Finalmente, quiero dejar constancia de que el profesor Jaime Escalante fue galardonado con la Medalla Presidencial de los Estados Unidos y el premio Andrés Bello, otorgado por la Organización de los Estados Americanos.

—Gracias, Daniel —dijo Camila. Ahora, vamos a los comentarios sobre la película, qué cosas positivas podemos extraer de ella y cuáles podrían ser aplicables en nuestro colegio.

SIMETRÍA CON PAPEL

Daniel ingresó al 1º medio con cierto nerviosismo; no estaba acostumbrado a sentirse así, por lo que se sentía un poco molesto consigo mismo. El enfrentar la clase con una gama de conocimientos recién adquiridos y enseñarlos por primera vez, le infundía temor. Junto a Camila, había planificado muy bien su clase, por lo que esperaba no encontrarse con alguna dificultad.

—¿Han escuchado hablar de Maurits Cornelis Escher —anotó el nombre en la pizarra— en alguna oportunidad?

Todos se miraron con cara de haber escuchado palabras en chino.

—No, señor —respondieron.

—Supongo que es un matemático —comentó Estefanía.

—Aunque su trabajo está relacionado con la matemática, en especial con la geometría, él no fue un matemático —respondió Daniel—. Este holandés nació el 17 de junio de 1898 y, como ocurre con muchos grandes genios, no fue un alumno muy destacado en el colegio.

—O sea, todavía tengo esperanza —comentó Andrés, causando risas entre sus compañeros.

—Su padre —continuó Daniel— le enseñó el mundo de la carpintería; esto lo llevó a interesarse y luego decidirse a estudiar Arquitectura. Sin embargo, al poco tiempo, se dio cuenta que lo suyo eran las artes gráficas. Ingresó a la Escuela de Arte donde, después de dos años de estudio, obtuvo una especialización en técnicas gráficas y trabajo sobre madera. Una vez terminados sus estudios, se dedicó a viajar por Francia, España e Italia; sus primeras obras retrataban, en forma realista, los paisajes y la arquitectura que encontró en sus viajes. En estos trabajos, Escher reflejó su predilección por la estructura de las construcciones y fue La Alhambra de Granada, en España, el edificio que más lo impresionó, debido a las ornamentaciones de sus muros que se repartían en el espacio disponible, de forma esquemática y perfecta. Él mismo lo dijo: "Es la fuente más rica de inspiración que jamás haya encontrado". Esto influyó en sus creaciones posteriores a 1937; a pesar de ello, las ideas de rellenar el plano con un mismo motivo se consideran suyas, no influidas por su aprendizaje. Prueba de esto es que ya en 1922 había realizado un trabajo en el que se representaban ocho cabezas, cuatro al derecho y cuatro al revés.

—Señor, ¿y qué relación tiene con la matemática? —consultó Estefanía—. Porque por algo estamos hablando de él, ¿cierto?

—Por supuesto —respondió Daniel—, y esa conexión se produce tras visitar la Alhambra por segunda vez en 1936; durante varios días, copió los motivos allí representados y descubrió un sistema para representar particiones periódicas del plano, consiguiendo descubrir 17 grupos de simetrías, a pesar de sus primarios conocimientos matemáticos. Posteriormente, realizó varios trabajos relacionados con la partición regular del plano y el uso de patrones que rellenan el espacio sin dejar ningún hueco. Es así que, por ejemplo, de un hexágono podía llegar a la figura de un reptil, creando uno de sus más famosos trabajos que ya conoceremos con más detalles. En alguna oportunidad, Escher escribió "con frecuencia me siento más próximo a los matemáticos que a mis colegas los artistas". Y sobre completar el plano —concluyó Daniel— es nuestro próximo trabajo en la asignatura. Me falta sólo agregar que la visión única de Escher, sobre el espacio y de las matemáticas, le permitieron dibujar una numerosa colección de fantásticos dibujos, hasta su muerte en 1972. Una vez finalizada la clase, les voy a dar una dirección de Internet donde podrán conocer y admirar su obra.

—Señor, cuando se refiere a completar el plano —dijo Ángel— podría tomarse como ejemplo una hoja del cuaderno de matemática, que está llena de cuadritos.

—Exactamente, muy buen ejemplo —dijo Daniel, pensando cómo no se le había ocurrido antes—; formalmente, completar el plano se conoce como Teselar, que corresponde a embaldosar o recubrir una superficie con figuras regulares o irregulares. Claro que para teselar un plano, a los polígonos o figuras se le deben realizar rotaciones, traslaciones o simetrías, que es lo primero que vamos a estudiar.

—Señor encontré otra telesa..., ¿cómo era? —preguntó María Paz, mientras sus compañeros reían.

—Teselación —respondió Daniel y lo escribió en la pizarra.

—Eso mismo —dijo María Paz, poniéndose de pie e indicando hacia el suelo con su mano —. Miren el piso, estamos parados sobre una teselación.

—Tienes toda la razón María Paz, te felicito —le dijo Daniel— y si empiezan a prestar mayor atención a su alrededor, empezarán a encontrar muchas teselaciones.

—Señor —dijo Nicol—, el diseño de su corbata también es una teselación.

Daniel levantó su corbata y la examinó. Nicol tenía razón.

—Comencemos identificando, en primer lugar, lo que es una simetría. ¿Qué les dice la palabra y qué ejemplos pueden dar? —preguntó Daniel.

—Cuando se habla de simetría, se refiere a dos cosas iguales —señaló Estefanía.

—Yo creo que no son dos objetos iguales —dijo Ester—, sino un solo objeto dividido en dos partes iguales.

—Además, dos objetos iguales —opinó Andrés— se puede referir a su forma y no a su tamaño.

—Y ejemplos sobre lo que están definiendo… —pidió Daniel.

—Las mariposas son simétricas, ya que su parte derecha es igual a su parte izquierda —señaló Ester.

—El cuerpo humano también es simétrico —aportó Ricardo—, ya que si lo cortamos verticalmente en dos, ambas partes son iguales.

—Un poco sanguinario tu ejemplo —le señaló Estefanía.

—Construyamos figuras simétricas —dijo Daniel—. Tomen una hoja y dóblenla por la mitad, doblen por la mitad nuevamente y vuelvan a doblar por tercera vez. Ahora corten en forma diagonal, con igual medida, los dos extremos “cerrados” y desdoblen la hoja.

—¡Qué bonito! —expresó Nicol—. Me gustó.

—¿Qué obtuvieron? —preguntó Daniel.

—Dos rectángulos con un rombo al medio —respondió Ángel—; o sea, dos figuras simétricas.

—Vuelvan a doblar el papel como lo tenían —dijo Daniel— y, ahora, corten las otras esquinas en la misma medida y en diagonal pero, antes que lo hagan, dibujen en su cuaderno la figura que ustedes creen que aparecerá al desdoblar la hoja.

Múltiples figuras aparecieron en los cuadernos y todos estaban ansiosos por ver si su dibujo era el correcto. Después de hacer los cortes, varios se sintieron felices por haberlo predicho correctamente, mientras que otros trataban de justificar su error.

—Ahora, un momento de arte puro —anunció Daniel—; doblen dos veces por la mitad una hoja y luego hagan el corte que a ustedes más les agrade. Finalmente desdoblen y vean su simétrica creación.

Así hicieron todos y emergieron hermosas figuras que luego colocaron en el diario mural de su sala, orgullosos de su creación.

—Algunos de ustedes todavía tienen sobre su mesa los restos cortados de papel; desdóblenlos y obsérvenlos —señaló Daniel.

—¡Son simétricos! —exclamó María Paz.

—El doblez que ven en cada figura —explicó Daniel—, y que corresponde a una línea, lo llamaremos de aquí en adelante Eje de Simetría. Así que, anoten en su cuaderno que un eje de simetría es una recta que divide a una figura u objeto en dos partes iguales, donde los puntos opuestos son equidistantes entre sí. Y vamos de inmediato al siguiente concepto que aprenderemos hoy; me refiero a la rotación. Al igual que en el primer caso, les pregunto: ¿Qué significado representa esa palabra para ustedes y qué ejemplos me pueden dar?

—Rotar es girar, dar vuelta —dijo Elena.

—Por ejemplo, las ruedas de una bicicleta —agregó Andrés.

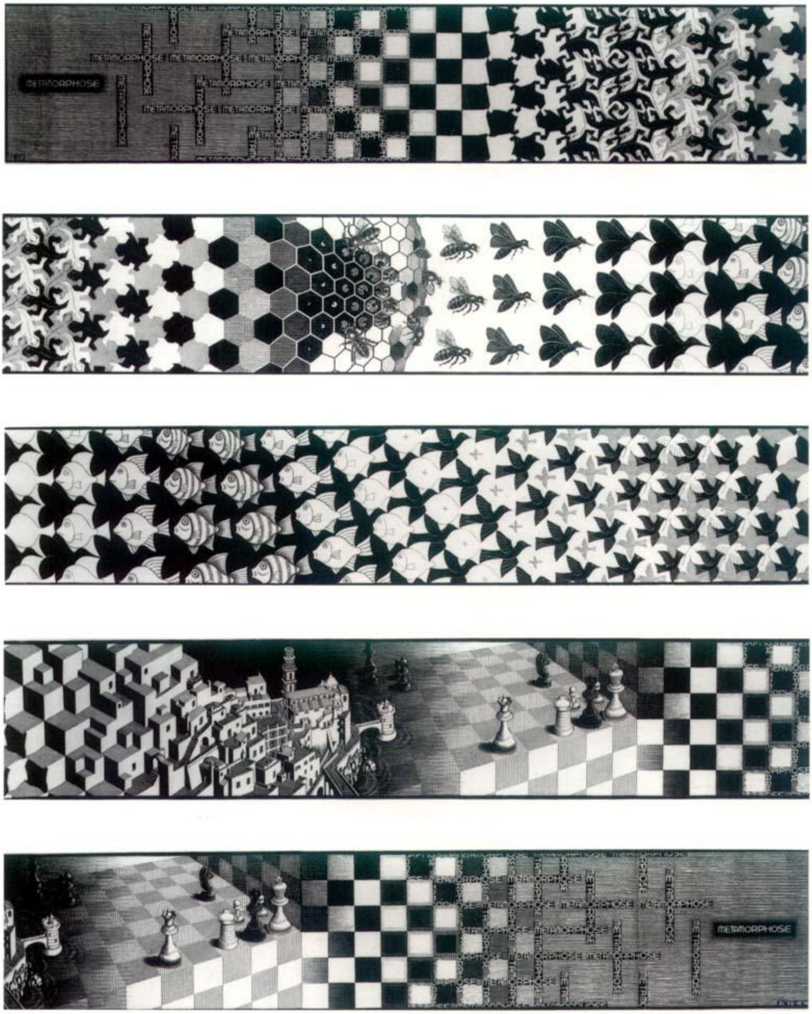
—O los punteros del reloj —aportó Estefanía.

—Hay muchos ejemplos —señaló Ángel—; un carrusel, las aspas de un ventilador, las hélices de un helicóptero…

—Muy bien —dijo Daniel—, me parece suficiente y correcto lo que han señalado. Lo único que agregaría es que, en cada una de las rotaciones que dieron como ejemplo, existen tres elementos: un punto que es el centro de rotación; un ángulo que indica, por ejemplo, que la rueda de la bicicleta se movió media vuelta o que la manecilla del reloj se movió del 1 al 3; por último, también un sentido de rotación, es decir, hacia dónde gira. Efectuemos la siguiente actividad —siguió Daniel—: marquen un punto P y tracen una circunferencia, cuyo centro sea P. Ahora, unan el punto P con un punto Q de la circunferencia. Utilizando el transportador dibujen un ángulo de 60º en sentido contrario a las manecillas del reloj y marquen como R el nuevo punto determinado en la circunferencia… ¿Listos? Lo que hemos hecho —prosiguió Daniel— es asociar el punto R al punto Q, mediante una rotación con centro P, con un ángulo de 60º y en sentido opuesto a las manecillas de un reloj. Allí, están todos los conceptos que necesitamos para trabajar con rotaciones o giros. Vamos a dejarlo hasta aquí y la próxima clase nos preocuparemos de la traslación, de profundizar en las teselaciones y crearemos nuestras propias obras de arte. ¡Ah! No se olviden de visitar en Internet el museo sobre Escher.

Daniel escribió en la pizarra, con letra clara y grande, la dirección prometida al inicio de la clase:

http://www.nucleogestion.8m.com/HALL.HTM.


METAMORPHOSE

TESELANDO

—¿Cómo estuvo ese paseo por el Museo de Escher? —preguntó Daniel.

—Genial, profe —respondió Ester—; usted sabe que me gusta mucho lo artístico y lo que creó Escher es espectacular.

—A mí me gustó mucho el cuadro "Profundidad" —señaló Nicol—, el que repite el motivo del tiburón, porque crea una ilusión de volumen extraordinaria en un dibujo que es plano.

—Mi preferido es "Subiendo y Bajando" —opinó Andrés—, ya que siempre me han gustado las ilusiones ópticas y ésta es una.

—Y a usted señor. ¿Cuál le gusta más? —preguntó Ángel.

—Hay varios que me agradan —respondió Daniel—, pero si tengo que elegir, optaría por "Cielo y Agua" que fue el primero que me llamó la atención cuando conocí la obra de Escher. Me gusta mucho cómo combina peces y aves, el nadar y el volar, con clara sugerencia sobre la evolución de las especies. Bueno… En la clase anterior —recordó Daniel—, estuvimos trabajando con el concepto de rotación. Antes de ver el siguiente concepto, que corresponde a traslación, vamos a analizar las situaciones en las que se necesita encontrar el centro y el ángulo de rotación de una figura. ¿Quién quiere pasar a construir una figura en la pizarra?

—¡Yo! —dijeron varios, alzando la mano.

—Pasa, María Paz —dijo Daniel.

Y fue dando las instrucciones, mientras María Paz, con regla y compás, las seguía.

—Dibuja dos trazos, uno AB y otro A'B' —señaló Daniel—. Ahora une A con A' y B con B' y construye la simetral del trazo AA' y del trazo BB'.

Los demás alumnos también seguían las instrucciones, dibujando en sus cuadernos.

—Designen por P el punto formado por las intersecciones de las simetrales. Ese punto encontrado corresponde al centro de la rotación y ustedes lo pueden verificar. ¿Quedó claro?

—Sí, señor —respondieron.

—Ahora, para encontrar el ángulo de rotación —explicó Daniel—, unan A con P y A' con P, y luego midan el ángulo APA' para obtener el ángulo de rotación. ¿Entendieron?

—Sí, señor —dijeron a una voz.

Daniel esperó a que Ana María tomase asiento e hiciese el dibujo en su cuaderno, antes de proseguir.

—¿Qué significa para ustedes traslación? —preguntó Daniel, haciendo una pausa—. ¿Qué ejemplos pueden dar?

—Es trasladarse, ir de un lugar a otro —respondió Ángel.

—Mi familia ha sido varias veces trasladada de una ciudad a otra —agregó Elena.

—Subir por una escalera mecánica es una traslación —aportó Estefanía.

—Un auto por la carretera —agregó Ricardo.

—Entonces, podemos definir la traslación como la acción de deslizar o mover una figura en el plano, en una dirección —concluyó Daniel—. Ahora, volviendo a lo que tratamos la clase pasada, quiero que me den ejemplos de Teselaciones en la vida cotidiana.

—¿Eso de cubrir el plano? —preguntó Nicol.

—Exacto, lo que vimos cuando hablamos de Maurits Cornelis Escher —respondió Daniel.

Y así, señalaron las teselaciones realizadas con baldosas, cerámicos, pastelones, azulejos, tejas en pisos, muros y techos.

—¿Recuerdan qué son los polígonos regulares? —preguntó Daniel.

—Los que son iguales —respondió María Paz.

—Los que tienen igual las medidas de sus lados y de sus ángulos —completó Andrés.

—¿Cuál, por ejemplo? —preguntó nuevamente Daniel.

—El cuadrado —respondió Nicol.

—El triángulo equilátero —agregó Elena.

—Les pregunto sobre esto porque ahora vamos a conocer la llamada teselación regular y que se forma precisamente por polígonos regulares —explicó Daniel.

—Entonces la hoja del cuaderno es una teselación regular —aportó Estefanía.

—Correcto —indicó Daniel, y nuevamente preguntó—: ¿Qué polígonos regulares pueden recubrir el plano sin superposiciones ni vacíos?

—Por el cuaderno ya sabemos que el cuadrado lo cubre; habría que ir probando con las otras figuras —señaló Ricardo.

—Háganlos y después me cuentan las conclusiones que extraigan de ese trabajo.

Comenzaron a dibujar en sus cuadernos diversas figuras y las teselaciones respectivas.

—Listo, señor, ya tengo una conclusión —dijo Ángel.

—Pasa y explícala, por favor.

—Al ir haciendo los dibujos me di cuenta que, para que la teselación resulte, la suma de los ángulos en cada vértice ha de ser 360º —explicó Ángel—; por lo tanto, la medida de los ángulos de los polígonos regulares tiene que ser un divisor de 360º. De acuerdo a esto, los únicos polígonos regulares que recubren el plano son: el triángulo, el cuadrado y el hexágono, cuyos ángulos interiores miden 60º, 90º y 120º, respectivamente.

—¡Excelente! —reconoció Daniel—. ¿Alguien quiere preguntar algo?

—Yo, señor —dijo Andrés— pero no es una pregunta. Me gustaría que se explicara, más en detalle, por qué no se puede, por ejemplo, teselar con un pentágono, porque yo lo hice el dibujo en mi cuaderno y creí que sí se podía.

—El dibujo es sólo una ayuda; lo adecuado, para llegar a una conclusión valedera, es basarse en las propiedades de las figuras geométricas —explicó Daniel—. Los ángulos interiores de un pentágono regular son de 108º cada uno. Al unir pentágonos en cada vértice se pueden juntar 3 de ellos, es decir, 108 por 3, lo que nos da 324º; por lo tanto, no podemos colocar otro pentágono, ya que quedaría superpuesto a los anteriores; y si no colocamos otro, nos queda un espacio que no podemos rellenar.

—Entonces siempre hay que teselar con la misma figura —señaló Ester.

—No —respondió Daniel—, hay otras teselaciones llamadas semiregulares en las que se utiliza más de un tipo de polígono regular, pero siempre con la condición de que la suma de los ángulos en cada vértice sea de 360º.

—Podría dibujarnos un ejemplo —pidió Ricardo.

—Por supuesto, y les digo inmediatamente que sólo es posible combinar cinco tipos de polígonos regulares: triángulos, cuadrados, hexágonos, octógonos y dodecágonos.

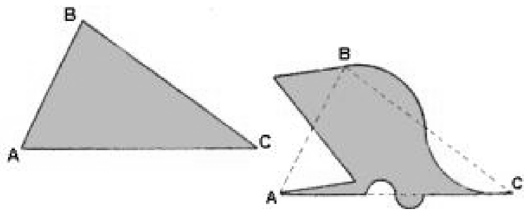
Daniel dibujó un ejemplo en la pizarra y luego señaló:

—Para la próxima clase quiero que traigan dibujados los ocho tipos de teselaciones semirregulares que existen, que elijan una de ellas, y teselen una hoja completa de su cuaderno.

—¿Lo tenemos que pintar? —preguntó Ester.

—No es necesario, pero si alguien quiere hacerlo, no hay problema —respondió Daniel.

—Para finalizar nuestra clase vamos a trabajar con teselaciones como las creadas por Escher. Sigan las siguientes instrucciones para ello: saquen una hoja y, en ella, dibujen un triangulo cualquiera y luego distorsionen cada lado de él, pero con la condición de que siempre sea simétrico respecto de su punto medio. Les voy a dibujar un ejemplo, pero ustedes creen sus propios modelos:



—Esta figura se llama tríside; recórtenla y, con ella, cada uno va a teselar el plano, en este caso, una hoja de su cuaderno. ¡Manos a la obra! —dijo Daniel.

Todos se pusieron en actividad, muy concentrados en la perfección de su trabajo.

—Excelente trabajo —señaló Daniel—. La próxima clase, seguiremos con este apasionante tema.

CONCURSO MATEMÁTICO

—¿Cómo te fue con tu concurso de creación poética y literaria de matemática? —preguntó Daniel a Rocío.

—Bastante bien —respondió Rocío—; no pensé que iba a tener tanta participación, así que estoy muy contenta por el resultado obtenido. Aquí te traje los poemas y cuentos para que, con Camila y Karen, decidan los ganadores.

—Perfecto. Hoy en la tarde nos vamos a reunir. Mañana te damos el resultado.

—Bien me parece —respondió Rocío—, mis alumnos están impacientes por saber quiénes serán los ganadores y quiénes van a llevarse los premios.

—¿Cuáles son los premios? —preguntó Daniel.

—Unos reproductores MP4 y algunos CD de sus cantantes y grupos favoritos. El Centro de Padres y la Dirección cooperaron con eso.

Al día siguiente, la decisión ya estaba tomada y se la comunicaron a Rocío. Hubo un empate, en la categoría Poemas, entre "El glotón" y "La familia triángulo", mientras que, en la categoría de cuentos, el ganador fue "El mundo de los Q". Los trabajos fueron publicados en la página Web del colegio y en los paneles ubicados al ingreso del establecimiento.

EL GLOTÓN

Como mi hambre aumentaba
decidí un sándwich preparar,
a mi pan coloqué $\frac{1}{8}$ de queso
y $\frac{1}{8}$ de mortadela, además.
Como aún me pareció pequeño,
$\frac{3}{8}$ de queso decidí agregar
y como si esto fuera poco,
de mortadela, $\frac{1}{8}$ más.
¡Si vieran la tremenda boca
que tuve que abrir para tragar!
Y como es lógico, más tarde,
el dolor de estómago me hizo llorar.
Es que calculen la cantidad
de queso y mortadela, y entenderán
que vale más ser medido en la vida
porque todo exceso hace mal.

LA FAMILIA TRIÁNGULO

Todos los triángulos somos
polígonos muy amigables,
3 lados, 3 ángulos, 3 vértices,
nuestros elementos principales.
Yo soy el equilátero
y mis lados iguales tengo,

y por más que me estiren y estiren
mis ángulos inalterables mantengo.
Cada uno de ellos mide
exactamente 60 grados
y cuando me trazan una altura
quedo, en dos partes iguales, cortado.
Yo soy su hermano isósceles,
tengo tan solo dos lados iguales
y opuestos a ellos, aunque no crean,
dos ángulos que lo mismo valen.
En cambio yo soy el más desordenado,
como escaleno me han bautizado,
mis ángulos son todos desiguales
y lo mismo pasa con mis lados.
El que no se hace mayor problemas
es mi primo acutángulo
pues menos de 90 grados tiene
la medida de sus ángulos.
Pero el más chistoso de todos
es el tío obtusángulo
que entre 90 y 180 grados
tiene uno de sus ángulos.
Y si preguntan por el más famoso,
no hay duda: triángulo rectángulo,
un ángulo de 90 grados
a sus catetos afirmando.
A su lado más largo
por hipotenusa han bautizado,
¿creerías que en tan pequeño triángulo
el más grande teorema se ha creado?

Pitágoras fue el matemático
que descubrió por sabio y sus musas
que al sumar el cuadrado de los catetos,
resulta igual al cuadrado de la hipotenusa.
Y esta historia familiar finaliza,
en otro día nos juntaremos
para hablar de los cuadriláteros
y de todo su parentesco.

EL MUNDO DE LOS Q

No recordaba claramente cómo llegó hasta allí. Su última imagen era la de su madre dándole un beso y deseándole que durmiera bien, pero como el sueño no llegaba, se entretuvo observando en la penumbra de su cuarto la repisa llena de juguetes acumulados a lo largo de sus once años de vida.

El movimiento ondulatorio de las paredes no le impresionó, ni tampoco el gracioso baile de su osito de felpa favorito, ni menos el encontrarse tendido sobre un prado perfumado y multicolor bajo un cielo que mostraba dos hermosos soles.

Ya su abuelo le había contado sobre sus viajes al mundo de los Q y por eso nada de lo que ocurría le causaba temor, pero sí mucha curiosidad. Como, por ejemplo, el hermoso y perfecto coro de aves-Q que trinaban la melodía más bella jamás escuchada. Se encontraba en plena meditación cuando un gemido le hizo incorporarse y pudo observar el movimiento agitado y temeroso de una tortuga-Q, la cual al verlo, sin sorprenderse, se dirigió a él diciendo:

—¡Oh, cielos! ¿Qué podemos hacer? Esto será el final de nuestro inigualable mundo.

Sintió curiosidad y le preguntó la causa de sus lamentos, ante lo cual le relató:

—Hace cinco días-Q un ser con forma y propiedades de una goma, cruzó desde una dimensión desconocida a la nuestra. Su misión no era de paz, por el contrario, este ser maligno llegó con intenciones de borrar para siempre todo signo de vida-Q y construir el Mundo de la Nada, habitado por todos los seres goma del universo.

Su historia conmovió a Pablo y preguntó de qué forma podía ayudar —con un suspiro, la tortuga-Q respondió—:

—Para eliminar seres malignos de otra dimensión, debemos resolver tres enigmas, pero estos no están al alcance de nuestro saber.

Como Pablo dominaba algunos conocimientos, aprendidos en su colegio, pidió que le dieran a conocer esos problemas para intentar solucionarlos.

—Los problemas son los siguientes —dijo la tortuga-Q—:

1) Debemos recoger exactamente 4 litros de agua de nuestro río-Q, con la sola ayuda de una vasija de 5 litros y otra de 3 litros. Las vasijas no tienen indicaciones de medidas, entonces ¿cómo hacerlo?

2) Tres inocentes fracciones-Q y tres seres gomas deben atravesar el profundo y caudaloso río-Q en una canoa cuya capacidad es de dos personas, pero si por algún motivo las fracciones-Q quedan en desventaja numérica, los seres gomas las borrarán para siempre. ¿Cómo podrían atravesar el río, todos ellos, sanos y salvos?

3) Un entrenador de un circo-Q necesitaba 40 minutos para lavar un elefante—Q. Su hijo puede hacerlo en 2 horas. ¿Cuánto tiempo tomaría al entrenador y a su hijo lavar 3 elefantes-Q trabajando juntos?

Pablo puso manos a la obra, se concentró y puso al máximo sus capacidades lógicas y numéricas para solucionar los problemas.

Le costó, pero finalmente lo logró. Llevó las soluciones a la tortuga-Q y gracias a Pablo lograron salvar su mundo y nunca más pudieron volver los seres goma. Se hizo una gran fiesta en homenaje a Pablo y le dijeron que en el próximo viaje a su mundo lo invitarían a conocer un mundo que quedaba al lado del de ellos, en el cual vivía un anciano muy simpático de un curioso nombre: **Pi**.

¿DEMOSTRACIONES?

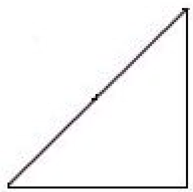
—Camila, he demostrado que la diagonal de un cuadrado de 1 cm de lado mide 2 cm —dijo Daniel ingresando a la sala de profesores con cara muy seria.

—¿Cómo es eso? Te afectó el sol camino al colegio —dijo Camila riendo—. Si los lados miden 1 cm, obviamente la diagonal mide $\sqrt{2}$ cm.

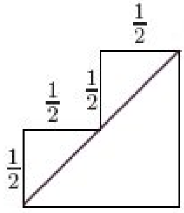
—Así que no me crees. Te lo voy a demostrar —desafió Daniel a Camila.

Sacó una hoja de su maletín, se sentó al lado de Camila y comenzó a explicar.

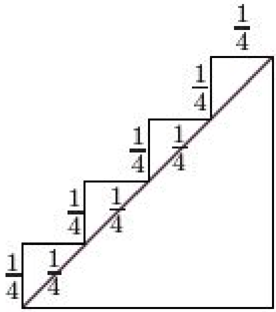
—Voy a dibujar la mitad de un cuadrado para demostrártelo, es decir, un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1 cm.



—Ahora, sobre la diagonal, trazo segmentos de medida medio centímetro, formando triángulos de la siguiente forma:



—Si sumas los trazos, comprobarás que resulta 2 cm. Ahora voy a hacer el mismo procedimiento, pero con trazos de un cuarto de cm.

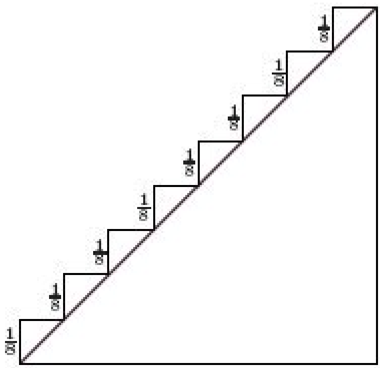


—¿Cuántos trazos se formaron y cuánto suma? —preguntó Daniel.

—Ocho segmentos de $\frac{1}{4}$ que sumados dan 2 cm —respondió Camila.

—Ahora, observa la siguiente figura y dime qué concluyes.

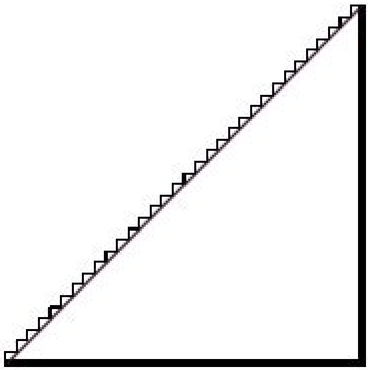
Y Daniel hizo otra nueva figura.



—¿Cuánto suman los segmentos nuevamente? —preguntó Daniel sonriente, con cara de triunfo.

—Son 16 segmentos de $\frac{1}{8}$, y suman dos —respondió Camila.

—Y si lo hago infinitamente hasta que se llegue a confundir con la hipotenusa del triángulo, resultaría más o menos así:



—¿Cuánto va a medir la hipotenusa?

—Dos, también —contestó Camila.

—Tú lo has dicho. En conclusión, la diagonal de un cuadrado de lado 1 cm mide 2 cm —dijo Daniel riendo, ante la cara de incredulidad de Camila.

—Me voy, nos vemos mañana —se despidió Daniel, poniéndose de pie.

—Espera, espera,…—grito Camila, mientras Daniel abandonaba la sala de profesores—. Esto no es posible, debe haber un error.

—Chao Camila —reiteró Daniel y no pudo aguantar el irse riendo por los pasillos del colegio.

Al día siguiente, comentaban entre risas la situación del día anterior.

—Deberíamos enseñarles a nuestros alumnos todas las curiosidades que se han dado y se dan en la matemática —dijo Camila—, incorporándolos en los respectivos contenidos.

—Es buena idea, seguro que les gustará saberlo; sería entretenido y les abriría la mente —aprobó Daniel.

—Aprovechemos el tiempo y recordemos algunos de ellos —propuso Camila.

—De acuerdo —dijo Daniel.

—En primero medio, se puede dar a conocer el que es quizás el más famoso, demostrar que 1 es igual a 2. Se comenzaba con la igualdad, a = b, luego se multiplicaba la igualdad por a y se restaba b^2, así:

$$a = b \quad /\cdot a$$

$$a^2 = ab \quad /-b^2$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

—Ahora, se factoriza —agregó Daniel— y se divide la igualdad por (a-b).

—Exactamente, es decir

$$(a+b)(a-b) = b(a-b) \quad /:(a-b)$$

$$a + b = b$$

—Como a = b entonces, al reemplazar, resulta b + b = b, o sea 2b = b.

—Dividiendo por b, la ecuación resulta que 2 = 1.

—Hace años que no hacía esta "demostración" —comentó Daniel, haciendo con las manos un gesto de comillas—. Me recuerda mis tiempos de universitario, cuando todos nos encantábamos con ese tipo de ejercicios. Lo importante es que los alumnos concluyan por qué se produce ese error; y no como una que conozco, que andaba persiguiéndome por los pasillos para que le dijera por qué la demostración de que la diagonal de un cuadrado de lado uno es dos, es errónea —dijo Daniel, mirando a Camila con una sonrisa irónica.

—Para tu información —le respondió Camila—, ya averigüé dónde está el error.

—Me parece muy bien —dijo Daniel sonriente—. Vamos a otra curiosidad, demostremos que 0 es igual a 1.

—Esa no la conozco —reconoció Camila.

—No la he hecho hace tiempo, pero creo poder reconstruirla; también serviría para primero medio.

Daniel comenzó a hacer el desarrollo en una hoja.

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$$

$$(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$$

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$$

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4} = n^2 - n(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4}$$

$$\left[(n+1) - \frac{2n+1}{2}\right]^2 = \left[n - \frac{2n+1}{2}\right]^2 \quad / \sqrt{}$$

$$(n+1) - \frac{2n+1}{2} = n - \frac{2n+1}{2}$$

$$n+1 = n$$

$$1 = n - n$$

$$1 = 0$$

—¿Qué te parece? —preguntó Daniel.

—¡Buenísimo! —respondió Camila—. Y me hiciste acordar de otro, con funciones trigonométricas, ideal para tercero medio.

—Ahora, soy yo el ignorante —dijo Daniel riendo—; jamás he visto una con trigonometría.

Y el turno fue de Camila.

$$cos^2\,\alpha = 1 - sen^2\beta \qquad /\sqrt{}$$

$$cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\beta} \qquad /+1$$

$$1 + cos\alpha = 1 + \sqrt{1 - sen^2\beta} \qquad /(\quad)^2$$

$$(1 + cos\alpha)^2 = \left(1 + \sqrt{1 - sen^2\beta}\right)^2$$

—Consideremos que alfa toma el valor 180º —señaló Camila—, entonces

$$(1-1)^2 = \left(1+\sqrt{1-0}\right)^2$$
$$0 = (1+1)^2$$
$$0 = 4$$

—¿Cómo está? —preguntó Camila.

—Buenísimo —reconoció Daniel.

—Y tengo otro más —dijo Camila—, para cuarto medio, con logaritmos.

—Veamos —dijo Daniel.

El desarrollo de Camila fue el siguiente:

$$\begin{aligned}
&(-1)^2 = 1\\
&\log(-1)^2 = \log 1\\
&2\log(-1) = \log 1\\
&2\log(-1) = 0\\
&\log(-1) = \frac{0}{2}\\
&\log(-1) = 0\\
&\log(-1) = \log 1\\
&-1 = 1
\end{aligned}$$

—Excelente —reconoció Daniel—, pero ahora voy a darte a conocer mis propias falacias matemáticas.

—¿En serio? —dijo Camila entre dudosa y risueña.

—Por supuesto. Sabemos que en los números complejos $i=\sqrt{-1}$; basándome en esto realicé el siguiente procedimiento:

$$i=\sqrt{-1} \quad /\cdot i$$

$$i^2=i\sqrt{-1}$$

$$-1=i\sqrt{-1}$$

$$-1=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$$

$$-1=\sqrt{1}$$

$$-1=1$$

—Buena, te pasaste —reconoció Camila.

—Tengo otro con números complejos, observa:

$$\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}$$

$$\sqrt{\frac{-1}{1}}=\sqrt{\frac{1}{-1}}$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$

$$\frac{i}{1}=\frac{1}{i}$$

$$i=\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}$$

$$i=\frac{i}{i^2}$$

$$i=\frac{i}{-1}$$

$$i=-i$$

—Eres genial, Daniel —exclamó Daniela.

—Y eso no es todo —dijo Daniel orgulloso—; te voy a contar una historia: hace unos años, el Ministerio de Educación sugirió no colocar nota final 3,9 en las asignaturas, ya que generaba muchos conflictos. Recuerdo que Freddy mencionó ese hecho en el Consejo de Profesores y muchos dijeron no estar de acuerdo con regalarle notas a los alumnos. Así que tomé la palabra y defendí mi postura de que 3,9 ó un 4 eran lo mismo y que no implicaba mayor o menor conocimiento, y que incluso podría llegar a ser una oportunidad educativa, comprometiendo al alumno, con una especie de contrato, a que su rendimiento en esa asignatura, y en general, debería ser muy superior el año siguiente, firmado por él y por su apoderado.

—No recuerdo para nada ese consejo ni esa discusión —señaló Camila.

—Me parece que fue el mes en que estuviste operada —recordó Daniel—. Bueno, la cosa fue que Freddy dijo que le extrañaba que un matemático dijera que un 3,9 y un 4 eran lo mismo. Entonces me piqué, pasé adelante y en la pizarra anoté y expliqué lo siguiente: Ustedes saben que $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ y que si elevo el 1 a 1000, también resulta 1, por lo tanto los matemáticos y los no matemáticos, sabemos, sin ninguna duda, que 1 elevado a cualquier número es 1.

—¿Y todos estaban escuchando tu explicación? —preguntó Camila.

—Todos, y muy interesados en lo que yo pretendía. Continué explicando: Por lo tanto, $1^{3,9} = 1$ y como $1^4 = 1$, llegamos a la conclusión de que $1^{3,9} = 1^4$, y si dos potencias son iguales, entonces sus bases son iguales y sus exponentes son iguales; en conclusión 3,9 = 4. Y me retiré a mi asiento entre aplausos, risas y comentarios.

—Debe haber sido un momento espectacular —comentó Camila.

—Sí, pero después fui a hablar con Freddy y le pedí disculpas por lo que había hecho. Le dije que me había molestado que menospreciara mi opinión; al final, nos dimos la mano y todo quedó allí.

—Te tenías bien guardada esa historia —dijo Camila—, pero ¿cómo se te ocurrió esa falacia? ¿O ya la tenías pensada de antes?

—Fue un chispazo, una cosa del momento —señaló Daniel—; debió ser algo parecido a cuando alguien en un accidente es capaz de mover un vehículo por salvar a alguien, pero que en estado normal no lo puede hacer.

—Hay otra falacia —continuó Camila— que tiene un esquema distinto a los anteriores y que consiste en demostrar que un número no cambia.

—No entiendo a qué te refieres —dijo Daniel.

—Empecemos suponiendo que x es igual a 3. Entonces

$$x = 2 + 1$$

$$x - 1 = 2$$

—Si sumamos 10, pero sólo al lado izquierdo…

—Espera… —la detuvo Daniel—, ¿cómo es eso de sumar 10 a un solo lado de la igualdad? Obviamente, estás cambiando la ecuación por otra y la x ya no resultará 3.

—Con calma —dijo Camila—, espera que termine y allí lo comentamos. Entonces, sumo 10 al lado izquierdo, obteniendo

$$x + 9 = 2 \quad / \cdot (x - 3)$$

$$(x + 9)(x - 3) = 2(x - 3)$$

$$x^2 + 6x - 27 = 2x - 6$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$(x + 7)(x - 3) = 0$$

$$x - 3 = \frac{0}{x + 7}$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

—Eso ya no es matemática —dijo Daniel—, es brujería. Y en venganza, te voy a demostrar que dos números distintos son iguales.

—Ahora tú quieres ser el brujo —señaló Camila, riendo.

—Sean tres números a, b y c tal que a = b + c; obviamente a > b, es decir, a y b son dos números distintos. Ahora voy a multiplicar la igualdad por (a-b):

$$a = b + c$$

$$a(a-b) = (b+c)(a-b)$$

$$a^2 - ab = ab - b^2 + ac - bc$$

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

$$a(a-b-c) = b(a-b-c) \qquad / : (a-b-c)$$

$$a = b$$

—En conclusión —dijo Daniel—, los números que eran distintos, ahora son iguales.

—Muy buena —reconoció Camila—, pero tengo otra mejor. Comencemos con la desigualdad $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$ que, obviamente, es verdadera. Esto es lo mismo que decir $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$ que equivale a $\log\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log\left(\frac{1}{2}\right)^3$, o sea

$$2\log\frac{1}{2} > 3\log\frac{1}{2}$$

Ahora dividimos ambos lados de la desigualdad por $\log\frac{1}{2}$ y obtenemos que 2>3.

—Brillante —reconoció Daniel—, no sé cómo no nos han dado el premio Nóbel de Matemática.

—Porque no existe —dijo riendo Camila.

—Pero no creas que se me ha acabado el repertorio —dijo Daniel—. Observa esta:

$$a^2 - a^2 = a^2 - a^2$$

$$a \cdot (a - a) = (a + a)(a - a)$$

Ahora divido la expresión por $(a - a)$ y obtengo

$$a = a + a$$

$$a = 2a$$

Divido por a la expresión y resulta que 1 = 2. Y para rematar, te voy a mostrar cuál es el número más grande del universo —dijo Daniel sonriendo misteriosamente.

—Eso sí que es imposible —señaló Camila—, los números son infinitos.

—Hasta hoy —le respondió Daniel, riendo—. Supongamos que n es el número positivo más grande que existe, por lo tanto, no existe número mayor que n; a lo sumo igual, pero jamás mayor. Como n es el número más grande que existe, obviamente es mayor que 1 o, como máximo, igual a 1. Tenemos, entonces, que $1 \leq n$, también $n^2 \leq n$ ya que no existe un número mayor que n, ni siquiera su cuadrado. Pasemos n al otro lado, dividiendo; entonces $\frac{n^2}{n} \leq 1$ y simplificando n, resulta $n \leq 1$. Por lo tanto, por la desigualdad inicial y la recién obtenida, se concluye que $1 \leq n \leq 1$, por lo tanto, n=1. Acabo de demostrarte que 1 es el número más grande del universo.

—Esa sí que es locura. Creo que ya tenemos bastantes falacias para nuestros alumnos —dijo Camila—. Suficiente por hoy.

—Tienes razón, es hora de irse —dijo Daniel poniéndose de pie.

Y ambos se retiraron a sus respectivos hogares.

PREPARANDO MALETAS

Después del primer recreo, Camila y Daniel fueron llamados a la Dirección. La secretaria les comunicó que los necesitaban con urgencia.

—¿Qué habrá pasado? —preguntó intrigado Daniel.

—No tengo idea —dijo Camila—, mejor vamos enseguida y salimos de dudas.

Cuando llegaron a la oficina, estaba la Directora y, también, el Jefe de la U.T.P., ambos leyendo en silencio algunos papeles.

—Estimados colegas —comenzó diciendo la señora Sonia Montenegro—; el motivo de citarlos tan repentinamente es para comunicarles una excelente noticia. La alumna Sofía Benavente, del segundo año medio, ha sido seleccionada para representar a nuestra Región en la Olimpíada Nacional de Matemática, a realizarse en Santiago, la próxima semana.

Las caras de Camila y Daniel se encendieron y la felicidad los inundó a ambos. El habla no les salía.

—Los felicito por el trabajo realizado —continuó la señora Sonia—, ya que ambos contribuyeron a que este logro se hiciera realidad. En unos instantes más, vamos a reunir a todo el colegio para darles la buena noticia y darle la grata sorpresa a Sofía. Además, debemos comunicar quién va a acompañarla en este viaje.

—Me parece que adecuado que Camila sea la profesora acompañante; además que es un justo premio por toda su dedicación a esta preparación —sugirió Daniel.

—¿Estás de acuerdo, Camila? —preguntó la Directora.

—Me encantaría —reconoció Camila—, pero Sofía es del curso de Daniel y…

—Esto no se trata de cursos —interrumpió Daniel, y agregó sonriendo—. Así que tendrás que comenzar a preparar tus maletas.

—No se hable más —dijo la señora Montenegro—, Camila viajará con Sofía. Deseo que les vaya muy bien y que dejen muy bien puesto el nombre de nuestro colegio. Freddy les va a entregar algunos documentos.

—Quiero sumarme a las felicitaciones. Además, quiero decirles, con toda honestidad, que ustedes son una clara muestra de lo que se puede logar cuando se trabaja en equipo y en forma tan dedicada —señaló Freddy—. Junto con los resultados de la clasificación a la Olimpiada, nos enviaron la prueba aplicada a los participantes, así que se las voy a entregar para que la analicen y revisen con los alumnos que participaron en ella.

—Bien, eso es todo —concluyó la Directora, despidiéndose de ambos.

Camila y Daniel se dirigieron a la sala de profesores, no pudiendo ocultar su alegría ni el motivo de ella, por lo que, en breves instantes, ya estaban recibiendo las felicitaciones de todos sus colegas.

—En la tarde revisamos las preguntas de la olimpiada —dijo Daniel.

—De acuerdo. Citemos a Sofía y resolvamos los problemas con ella; así sabremos cuál fue el enfoque que les dio, aprovechando de darle más herramientas para lo que se viene —señaló Camila.

Aquella tarde, se reunieron los tres.

Antes de comenzar a trabajar, fue comentario obligado el homenaje que les rindieron en el acto de la mañana. La felicidad y el orgullo con que fue recibida la noticia los llenaba de alegría, pero también los comprometía a rendir al máximo en esta competencia.

—Hasta regalo, te tocó —dijo Camila a Sofía.

—Sí, fue un lindo gesto que no me esperaba —respondió Sofía—; además que una calculadora gráfica me va a ser de gran utilidad, éste y los próximos años.

—Bien, comencemos nuestra tarea —dijo Camila—. Voy a leer el primer enunciado y queremos que nos expliques el procedimiento que utilizaste para resolverlo. Dice así: "Hallar un número cuadrado perfecto de cinco cifras, sabiendo que el producto de esas cinco cifras es 1.568”.

—Como se referían a un número de cinco cifras, escribí lo siguiente:

$$n^2 = x_1 \cdot 10^4 + x_2 \cdot 10^3 + x_3 \cdot 10^2 + x_4 \cdot 10 + x_5$$

y si a esta expresión se le extrajera raíz cuadrada, obtendríamos un número de 3 cifras necesariamente.

—¿Eso lo sabías o lo concluiste allí? —preguntó Daniel.

—Lo saqué ahí, multiplique 99 por 99 y me dio un número de 4 cifras y al multiplicar 100 por 100, comenzaban los de 5 cifras —respondió Sofía—, así que lo expresé como $n = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$ que al elevarlo al cuadrado resulta

$$n^2 = \left(a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c\right)^2$$

—Y allí igualaste los valores de n^2, ¿cierto? —preguntó Camila.

—Sí, eso hice, desarrollando primero el cuadrado del trinomio formado, que da

$$a^2 \cdot 10^4 + b^2 \cdot 10^2 + c^2 + 2ab \cdot 10^3 + 2ac \cdot 10^2 + 2bc \cdot 10$$

Y lo escribí como

$$a^2 \cdot 10^4 + 2ab \cdot 10^3 + (2ac + b^2) \cdot 10^2 + 2bc \cdot 10 + c^2$$

—O sea, factorizaste y lo ordenaste en forma descendente —señaló Daniel.

—Sí, y al igualar los n^2, obtuve que

$$x_1 = a^2,\ x_2 = 2ab,\ x_3 = b^2 + 2ac,\ x_4 = 2bc$$

y que $x_5 = c^2$ —concluyó Sofía.

—Hasta allí, está muy bien tu procedimiento —reconoció Camila.

—Luego —continuó Sofía—, descompuse el 1.568 como $7^2 \cdot 2^5$ por lo que n^2 puede estar formado por las cifras 7, 7, 8, 4, 1 ó por 7, 7, 8, 2, 2 ó por 7, 7, 4, 4, 2. Descarté la segunda opción, ya que un cuadrado no puede terminar en 7, 8 ó 2. También eliminé la tercera opción, ya que su suma es múltiplo de 3, pero no de 9, por lo que no forma un cuadrado perfecto.

—Por lo tanto, las cifras de n^2 tienen que ser 7, 7, 8, 4, 1 —concluyó Camila.

—Exacto, y como x_5 es un cuadrado perfecto, o es 4 o es 1. Además que x_4 debe ser par. Por lo tanto, los posibles valores para n^2 son 17.784, 71.784, 77.184, 77.841, 78.741, 87.741, 74.781, 77.481, 47.781 y de todos ellos el único que es cuadrado perfecto es el 77.841, que es cuadrado de 279.

—Excelente, Sofía. Con razón clasificaste —comentó Daniel, y dirigiéndose a Camila preguntó—: ¿Cuál es el otro ejercicio?

—"Demostrar que la expresión $\frac{n^5-5n^3+4n}{n+2}$ es divisible por 24, siendo n un número entero" —leyó Camila.

—En este ejercicio, lo primero que intenté fue factorizar para ver si la expresión se reducía, así que escribí $n^5-5n^3+4n=n(n^4-5n^2+4)$ y me alegré mucho cuando me di cuenta que el paréntesis era el resultado de un producto de binomios. Factorizando, me dio $n(n^2-1)(n^2-4)$. Nuevamente factoricé, obteniendo en definitiva $n(n+1)(n-1)(n+2)(n-2)$. Esto me permitió simplificar el binomio n+2 —concluyó Sofía.

—Entonces, lo que hay que probar ahora es que $n(n+1)(n-1)(n-2)$ es múltiplo de 24 o, dicho de otro modo, que es divisible por 3 y por 8 —señaló Daniel.

—Sí, y como el producto $n(n+1)(n-1)(n-2)$ es una multiplicación de cuatro números consecutivos…

—¡Qué inteligente eres, no me había percatado de eso! —exclamó Camila.

—Significa —continuó Sofía, sonriendo por lo dicho por Camila— que, al menos dos de ellos son pares, además que cada cuatro consecutivos hay uno que es múltiplo de 4 y el otro par es múltiplo de 2, se concluye que la expresión es divisible por 8.

—Y como cada tres consecutivos, uno de ellos es múltiplo de 3, también es divisible por 3 —indicó Camila.

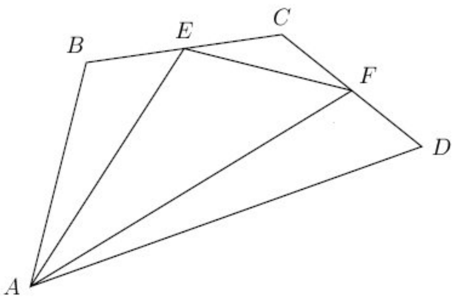
—En conclusión, como es divisible por 8 y por 3, lo es también por 24 —finalizó Daniel.

—Veamos el último ejercicio —dijo Camila.

—Ese no lo terminé, pero traté de avanzarlo al máximo y colocar todas las relaciones posibles, tal como me lo sugirieron ustedes —les contó Sofía.

—Dice así: "Los puntos E y F dividen los lados BC y CD del cuadrilátero convexo ABCD en dos partes iguales. Además, los segmentos AE, AF, EF, dividen el cuadrilátero en 4 triángulos cuyas áreas coinciden con 4 números naturales consecutivos. Determine la mayor área posible que puede tener el triángulo ABD" —terminó de leer Camila.

—Lo primero que hice, obviamente, fue la figura para entender lo que estaban pidiendo.



Y designé las áreas de los triángulos por n, n+1, n+2 y n+3; entonces, el área del cuadrilátero es 4n+6 y hasta allí llegué. No se me ocurrió nada más para hacer —reconoció Sofía.

—La verdad es que lo que sigue no es tan evidente —señaló Daniel—. Fíjate en el triángulo BDC; en él, E y F son puntos medios, eso implica que el triángulo CEF es la cuarta parte de él, es decir: Área(BDC) = 4 ·Área(CEF), por lo tanto

$$\text{Área}(ABD) = \text{Área}(ABCD) - \text{Área}(BDC) =$$
$$4n + 6 - \text{Área}(BCD) = 4n + 6 - 4 \cdot \text{Área}(CEF)$$

—Esta expresión es menor o igual que $4n + 6 - 4n = 6$, y esta igualdad se cumple cuando el triángulo CEF tiene la menor área. Eso implica que el triángulo ABD no puede tener un área superior a 6, así que ése es su valor máximo —concluyó Camila.

—Una forma de verificarlo es hacer el trapezoide isósceles, o sea AB=DC y considerar las medidas AD=6 y BC=4, con altura 2 —indicó Daniel.

—Cierto —dijo Sofía—, porque el área de ABD corresponde al área de un triángulo de base 6 y área 2.

—Bien, yo me retiro —anunció Daniel—, tengo algunas cosas que hacer. Las dejo para que se pongan de acuerdo en los detalles de su viaje.

—Chao, profe y gracias —dijo Sofía.

—Chao Daniel y gracias también —agregó Camila.

MUNDO FRACTAL

—Señor. ¿Qué se ha descubierto, en el último tiempo, en matemática? —preguntó Raquel en mitad de la clase de Funciones Lineales de 2º medio.

—Un descubrimiento novedoso e importante es el de los fractales —respondió Daniel—, ya que se encuentran fácilmente en la naturaleza.

—¿Y podría explicarnos de qué se tratan? —insistió Raquel.

—La verdad es que no tengo un dominio completo del tema, pero conozco a un profesor de la universidad que domina este tema y, si gustan, puedo hablar con él para que venga a darnos una charla sobre los fractales. ¿Qué les parece?

—Muy bien —respondieron varios.

Una vez finalizada la clase, Daniel fue a llamar por teléfono a su colega y amigo Eric Montaña para comentarle sobre la inquietud de sus alumnos y solicitarle su ayuda. Como existían algunos inconvenientes de horarios, Eric invitó a Daniel y a los dos segundos medios para asistir a la universidad y darles allí la exposición la semana siguiente. Le pidió que los alumnos llevaran lápiz grafito, goma, regla y compás.

—Qué bueno que conseguiste esta charla —comentó Camila, mientras caminaban, junto a los segundos medios, rumbo a la universidad—. Hace tiempo que quiero saber más sobre los fractales; he escuchado mucho sobre ellos, pero no he tenido mucho tiempo para investigar de qué se tratan.

—Pues yo estoy en las mismas; por eso, acepté de inmediato el ofrecimiento. Además, esto permitirá tener a nuestros alumnos actualizados en matemática.

Eric los estaba esperando. Acomodó a ambos cursos en una amplia sala, muy agradable, y con algunos elementos tecnológicos fundamentales para la charla que iba a dar.

—Los fractales —comenzó diciendo— los podemos encontrar fácilmente en la naturaleza. Se observan en el brócoli, la coliflor, los helechos, las montañas, en las franjas costeras, las nubes, los árboles, los copos de nieve, y en un sinnúmero de otros objetos. Pero lo mejor, para que sea entendible esta charla, es comenzar desde los inicios.

"La geometría fractal fue descubierta por el matemático polaco Benoit Mandelbrot, alrededor del año 1970. Ustedes saben que la geometría tradicional, la que estudian en el colegio, se encarga de las propiedades y de las mediciones de elementos tales como puntos, líneas, planos, volúmenes y de la combinación de estos elementos. Mandelbrot quería llegar más allá de eso; a él le fascinaba la complejidad que veía en la naturaleza, pero no podía describirla por medio de la geometría euclidiana; por ejemplo, las nubes no eran esféricas, las montañas no eran conos, las líneas costeras no eran curvas perfectas, etcétera"

—¿Se entiende la visión e inquietud de Mandelbrot? —preguntó Eric.

Un sí unánime se escuchó en el salón.

"Bien —continuó Eric—, entonces Mandelbrot desarrolló el concepto de fractal, derivándolo del latín fractus, que significa fracturado, roto, fraccionado o quebrado. Por consiguiente, podemos decir que Mandelbrot es el 'padre' de la geometría fractal. Muchos matemáticos se unieron posteriormente al estudio de los fractales, entre ellos, el francés Henri Poincare, Gastón Julia, Pierre Fatuo, también los matemáticos Hubbard, Sullivan y Douady, pero con un trabajo que apuntaba más a la parte matemática que a sus aplicaciones. Actualmente, con la ayuda de la tecnología, en especial de la informática, su estudio ha avanzado una enormidad y ya veremos más adelante la multiplicidad de aplicaciones en nuestro diario vivir que tiene el tema que hoy nos reúne.

Las características básicas de un patrón fractal son dos; en primer lugar, la autosimilitud, que consiste en que un mismo patrón se encuentra una y otra vez; y en segundo lugar, la dimensión fractal, que se refiere a una manera de medir qué tan rugosa es una curva. Normalmente trabajamos con la dimensión topológica, o sea considerando que los puntos tienen dimensión 0, las líneas 1, las superficies 2 y los volúmenes 3. Sin embargo, una curva que recorre una superficie, puede ser tan rugosa que casi puede llenarla. Superficies, como el follaje de un árbol o el interior de un pulmón, pueden efectivamente ser tridimensionales. Podemos entonces, pensar en la rugosidad como un incremento en la dimensión: una curva rugosa tiene una dimensión entre 1 y 2, y una superficie rugosa la tiene entre 2 y 3".

—Señor —levantó la mano Pamela y consultó—: usted habla de una dimensión entre 1 y 2, también entre 2 y 3, pero ¿se puede determinar en forma precisa su valor?

—El cálculo de la dimensión de un fractal se realiza utilizando límites, logaritmos, etc. que ustedes todavía no han visto, pero que ya conocerán en cuarto medio. Para el cálculo de dimensión de fractales de mayor complejidad, se usan computadoras, pero para fractales más simples se pueden usar fórmulas matemáticas. Ahora vamos a trabajar en algunas actividades prácticas que ayuden a captar de mejor forma lo explicado anteriormente.

Pidió a Camila y Daniel que le ayudaran a repartir entre los alumnos algunas hojas para realizar las primeras actividades.

—Vamos a construir la llamada Curva de Koch o Curva de Copo de Nieve. En primer lugar, construyan un triángulo equilátero de 9 cm de lado.

Esperó que todos terminaran y luego dio la siguiente instrucción.

—Dividan, ahora, cada lado del triángulo en 3 partes iguales y, en el segmento central, dibujen otro triángulo equilátero, borrando posteriormente ese segmento central.

Nuevamente hizo una pausa para que todos realizaran lo indicado y se acercó a Daniel, quien también estaba haciendo el dibujo.

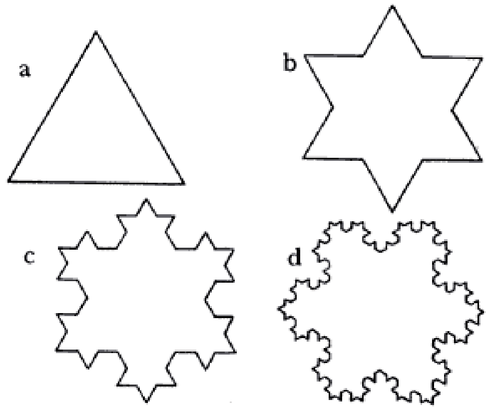
—Bien hecho; sino, te repruebo —le dijo en voz baja.

—No profe, no sea malo —respondió Daniel, riendo.

—Ya jóvenes, sigamos con nuestra construcción —exclamó Eric—. Nuevamente, dividan cada lado de los triángulos formados en partes iguales y, en el segmento central de cada uno de ellos, dibujen otro triángulo equilátero, sin olvidar borrar posteriormente el segmento central.

Una vez que todos finalizaron sus dibujos, mostró una diapositiva con las figuras que cada alumno debió haber realizado.

—En esta imagen, podrán ver la secuencia de pasos que fuimos realizando, y cómo varía la figura cuando se modifica según el patrón.



—Ahora, calculen los perímetros de las figuras a, b y c, es decir, de los primeros tres pasos que realizamos, y traten de extraer una conclusión.

—Los perímetros miden 27 cm, 36 cm y 48 cm respectivamente, o sea, van aumentando —señaló Mario.

—Yo veo algo muy curioso en esto —dijo Sofía—. A medida que el copo se va formando, el perímetro crece, pero su área no sobrepasa la del círculo circunscrito.

—Excelente conclusión —señaló Eric—, es una característica muy importante la que has logrado determinar. Aunque todavía no han pasado logaritmos —continuó diciendo—, quiero dejarles anotado el procedimiento para determinar la dimensión fractal de la curva de Koch, con el objetivo de dar mayor claridad a la pregunta que me hizo hace unos instantes su compañera Pamela. La fórmula es así:

$$D = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1{,}26181$$

—Ahora, construiremos un nuevo fractal —anunció Eric— llamado triángulo de Sierpinski. Dibujen un triángulo equilátero cuyo lado mida 8 cm y, luego, tracen sus medianas.

—Señor, siempre confundo la mediana con la transversal de gravedad —dijo Romina con voz y gestos de culpa.

—La mediana —explicó Eric— es el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, que es lo que les estoy solicitando que tracen. La transversal de gravedad es el segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto a ese vértice.

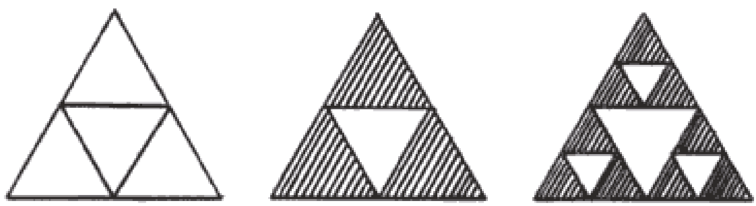
—Gracias, señor —dijo Romina.

—Una vez hecha su figura, sombreen los triángulos que apunten hacia arriba.

Eric recorrió la sala observando si seguían correctamente la instrucción dada.

—Hagan lo mismo que en el paso anterior con los triángulos interiores, menos con el que quedó sin sombrear. Posteriormente, sombreen, siguiendo la misma instrucción dada anteriormente.

Una vez finalizados los dibujos, Eric mostró una nueva diapositiva.



—¿Cuánto miden los lados de los triángulos más pequeños? —preguntó Eric.

—2 centímetros —respondieron varios a la vez.

—Ustedes ven que el área sombreada o achurada de cada triángulo en el triángulo central es $\frac{1}{4}$ del área total y que, al hacer la nueva división, como se ve en el tercer triángulo, cada triángulo sombreado es $\frac{1}{16}$ del triángulo original. Si hacemos una nueva subdivisión, ¿a qué parte del triángulo original corresponderá un triángulo sombreado?

Quedaron por unos instantes pensativos y en silencio, hasta que Diana encontró la respuesta.

—Primero fue $\frac{1}{4}$, luego $\frac{1}{16}$ o, lo que es lo mismo, $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ por lo que concluyo que ahora debe ser $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ o sea $\frac{1}{64}$ del triángulo original.

—Y si calculáramos el área total sombreada —agregó Esteban— sería primero $\frac{3}{4}$ del triángulo y luego $\frac{9}{16}$ o sea $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, por lo que el área total sombreada en el paso siguiente será $\left(\frac{3}{4}\right)^3$, es decir, $\frac{27}{64}$ del área del triángulo original.

—¡Excelente! —respondió Eric, dirigiéndose a Camila y Daniel—. Veo que tienen muy buenos alumnos y alumnas.

Ambos se miraron orgullosos.

—Ahora nos vamos a trasladar al laboratorio —indicó Eric—, donde haremos la parte final de la clase.

En el laboratorio, las mesas tenían en cada puesto 2 trozos de vidrio de 10 cm de lado, algunos clips y, al centro de la mesa, un pequeño tarro de pintura.

—Ahora, cada uno de ustedes va a construir un fractal — informó Eric—. Estiren el clip que tienen en su mesa y revuelvan la pintura contenida en el tarro.

—Coloquen ahora —continuó Eric— una gota de pintura sobre uno de los vidrios. Posteriormente, coloquen encima el otro vidrio, oprimiéndolos para que la pintura se desparrame.

—Ahora despeguen las láminas con mucho cuidado, sin deslizar los vidrios, y esperen un momento hasta que se sequen. El patrón fractal, creado con la gota de pintura, es el resultado de un proceso aleatorio.

Todos observaban felices sus fractales creados y los comparaban.

—Voy a explicarles lo que han hecho —dijo Eric—. Cuando separan los vidrios, el aire, que es menos viscoso, se introduce en la pintura, creando barreras inestables. Entonces, crecen pequeñas indentaciones y se forman dedos de aire, que separan la pintura. Este proceso se llama indentación viscosa y es el que mejor describe los fractales en la naturaleza.

—Para finalizar nuestro encuentro —señaló Eric—, quiero darles algunos ejemplos de modelos fractales como el de Lorenz de turbulencias atmosféricas y corrientes marinas; el de Henon sobre oscilaciones sufridas por cuerpos celestes que hacen que su trayectoria no sea completamente elíptica; el de Curvas de Koch aleatoria de fronteras de un país, trazado de una costa, trazado de un río, de fractales tipo árbol sistema arteriales y venosos... Hay múltiples elementos de la naturaleza —agregó— que pueden estudiarse mediante un modelo fractal, como el cuerpo humano con sus redes nerviosas y de vasos sanguíneos, sistemas de tubos pulmonares y bronquios, y redes neuronales. También, hay evidencia de que la localización geográfica de epicentros en temblores exhibe un patrón fractal. Por último, quiero contarles que los fractales mostraron su utilidad por primera vez cuando se generó con ellos un modelo simple para la aparición de ruido en ciertas líneas de transmisión en sistemas de comunicación digital; esto es, la presencia de breves interrupciones eléctricas que confunden y dificultan la comunicación. Eso es todo y les agradezco la visita, el excelente comportamiento y el gran interés en adquirir conocimientos, a partir de su propio entorno. Muchas gracias.

Un gran aplauso coronó la excelente exposición hecha por Eric. Los alumnos se despidieron dando la mano al profesor y las alumnas con un cariñoso beso en la mejilla, como muestras de aprecio por el trabajo realizado.

—Me has dejado sorprendido con los fractales —dijo Daniel a Eric, mientras se despedían—; no sabía la enorme aplicación que tenían. Te agradezco mucho la exposición.

—Cuando gustes Daniel, mientras tenga tiempo, puedo cooperar sin problema. Y para que te vayas más pensativo todavía —dijo riendo Eric—, gracias a la geometría fractal, se puede diagnosticar el desarrollo de la osteoporosis en los huesos.

—¿En serio? —exclamó incrédulo Daniel—. ¿Y cómo?

—Investiga, querido amigo, investiga —y se alejó riendo.

TIMOS MATEMÁTICOS

—Camila, escuchaste anoche la noticia sobre la enorme estafa que ocurrió en Estados Unidos, basada en la matemática? —consultó Daniel.

—No, sólo vi las primeras informaciones, después me acosté pues estaba muy cansada —respondió Camila.

—Te explico de qué se trata —dijo Daniel sentándose a su lado, mientras algunos de sus colegas se acercaban para escuchar el relato.

—Si tú fueses una empresaria —comenzó Daniel— a la que le gustaría invertir en acciones de modo tal que obtuvieses ganancias enormes y rápidas, de seguro te interesaría contratar, con ese fin, a alguien que siempre acierte con la subida o bajada de un valor de la Bolsa, o sea hablamos de alguien que predice lo que ocurrirá cada día.

—Pero eso es imposible —interrumpió Camila.

—Eso es cierto, pero escucha la habilidad de algunos estafadores para hacer creer lo contrario. Algunas empresas recibieron durante 7 días un informe prediciendo un determinado valor de la Bolsa. Obviamente cada inversionista creyó estar ante un genio de la matemática y accedió a pagarle 100.000 dólares por su predicción del día siguiente. De más está decir que esa carta con la predicción nunca llegó y que el estafador debe estarse dando la gran vida con el dinero ganado, que fue la nada despreciable suma de ¡50 millones de dólares!

—¿Y cómo hizo para acertar a todos los valores? —preguntó Rafael, que mientras preparaba su clase de Historia, escuchaba el relato.

—Haciendo uso de la matemática, un computador y muchas cartas —respondió Daniel—. Este individuo y seguramente algunos cómplices enviaron 32.000 cartas a potenciales clientes, diciéndoles a la mitad de ellos que las acciones de una determinada empresa subirán y a la otra mitad que bajarán. O sea, hay seguridad de acertar en la predicción de 16.000 cartas; a éstos se les envía una nueva carta con el mismo sistema, diciéndoles a la mitad, que las acciones de la misma empresa anterior subirán y a la otra mitad, que bajarán. El acierto será de 8.000 cartas. Siguiendo con esta estrategia, envía la séptima carta, cuando ya quedan sólo 500 inversionistas, quienes han recibido 6 cartas con la predicción correcta, pidiéndoles la suma de 100.000 dólares que les comentaba antes.

—Y con eso se ganó los 50 millones de dólares —finalizó el relato Camila.

—Exactamente, así que me he puesto a escribir cartas como loco…—dijo Daniel riéndose.

Marta, que se había sumado a la conversación, recordó un hecho de características similares ocurrido hace unos años en el país.

—Me acuerdo que uno recibía una carta en la que se pedía seguir algunas instrucciones; si se seguían correctamente, en menos de tres meses se recibiría una importante suma de dinero.

—¿Te acuerdas de las instrucciones de la carta? —preguntó Camila.

—Más o menos —dijo Marta—; a uno le llegaba un listado de 5 personas con sus respectivas cuentas bancarias y había que depositarle $ 2.000 al primero de la lista, borrarlo y agregarse uno al final de ella, o sea en la quinta posición y enviar la carta a tres personas, comprometiéndolas a que hiciesen lo mismo.

—Es como esas cadenas de oraciones que a veces le llegan a uno por correo —mencionó Daniel.

—Yo hice lo indicado —continuó Marta— para ver qué resultaba y a la semana siguiente ya empecé a recibir las primeras ganancias. Sin embargo, esto se había extendido tanto en el país que los bancos tomaron algunas decisiones para terminar con este juego. Así que prohibieron los depósitos de $2.000 y más aún, cuando se dieron cuenta que, entre los listados que estaban corriendo, había empleados de los mismos bancos.

—Actualmente, es bastante común conocer de estafas relacionada con Internet. Hace unos días se dieron a conocer los principales timos que ocurren, para que la gente no siga cayendo con ellos

—comentó Rafael —. Por ejemplo, en algunos sitios para mayores, le piden al visitante que ingrese el número de su tarjeta de crédito para que compruebe que es mayor de edad; obviamente, eso les sirve a los estafadores para hacer cargos a la tarjeta de crédito ingresada. Otra que recuerdo, es la de algunos sitios que ofrecen acceso gratis a material pornográfico tan sólo con instalar un programa "viewer" o "dialer" en su PC. Lo que ellos no saben, es que estos programas realizan llamadas de larga distancia desde ese computador para conectarse a una red privada. Luego, el usuario recibe una factura telefónica con precios exorbitantes de llamadas que él jamás ha hecho.

—Veo que el tema les ha gustado —dijo Daniel.

DEMOSTRACIÓN VISUAL

—Camila, necesito tu ayuda —dijo Daniel, ingresando a toda prisa a la sala de profesores. ¿Te acuerdas de Antonio Freire?

—Sí, por supuesto. Le hice clases en 1º medio —respondió Camila.

—Ayer recibí un *e-mail* en el que me cuenta que está estudiando Ingeniería Matemática, que hasta el momento le está yendo bien y que está seguro de aprobar todos los ramos del año.

—Es una muy buena noticia —señaló Camila.

—En su carta me pide un favor para su último examen. Quiere que le ayude con un tipo de demostración que lo ha complicado bastante —le contó, mientras buscaba en su maletín—. Dice que le explicaron cómo hacer algunas en clases, pero muy sencillas, comparadas con las que tiene que resolver ahora.

—A ver, muéstrame cuáles son —dijo Camila, girando las hojas que Daniel había extraído de su maletín—. Ah, sí me acuerdo, en realidad no son nada de fáciles cuando uno está dando sus primeros pasos matemáticos a nivel universitario.

—La primera ya lo hice; consiste en demostrar que $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$, pero quiero que me ayudes a revisar el procedimiento que seguí. ¿Te parece? —preguntó Daniel.

—Sí, dale no más —le animó Camila.

—Lo fundamental —comenzó explicando Daniel— es iniciar la demostración con una relación que sea siempre verdadera, la mayoría de las veces, un cuadrado de binomio. Por lo tanto, comencé con:

$(a-b)^2 > 0$, con a y b positivos distintos, que equivale a

$a^2 - 2ab + b^2 > 0$; esto se puede escribir como

$$a^2 - ab - ab + b^2 > 0$$

—Despejando -continuó Daniel—, obtenemos que $a^2 - ab + b^2 > ab$; en este paso multipliqué la inecuación por a+b y obtuve:

$$\left(a^2 - ab + b^2\right)\left(a + b\right) > ab\left(a + b\right)$$

—Hasta allí va todo súper bien —señaló Camila

—Entonces, me di cuenta que el primer miembro corresponde a una suma de cubos factorizada; por lo tanto, es equivalente a $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$, con lo que la demostración queda hecha.

—Está perfecto, no veo el porqué de tu desesperación al ingresar a la sala —dijo Camila algo desconcertada.

—Es que hay otra demostración que me tiene complicado. Me pidió que se la enviara lo antes posible y no quiero fallarle —agregó Daniel—. Hay que demostrar $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a + b}{2}$, en forma algebraica y construir su visualización en forma geométrica.

—¿Visualización en forma geométrica? —repitió Camila algo sorprendida.

—Claro, y no es lo único. También, hay que visualizar que se cumpla que $\left(a + b\right)^2 - \left(a - b\right)^2 = 4ab$; por eso recurro a ti, para que entre los dos realicemos la demostración —dijo Daniel.

—¡Qué interesante! A trabajar, entonces —sugirió Camila con decisión.

—Empecemos, como en el primer ejercicio, considerando dos números a y b distintos y que $\left(a - b\right)^2 \geq 0$ lo que equivale a $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Desde aquí, no supe cómo seguir —reconoció Daniel.

—Transformemos el cuadrado de la diferencia en el cuadrado de una suma —sugirió Camila.

—¿Cómo es eso? —preguntó Daniel—. No te capto la idea.

—Así —dijo Camila, y escribió:

$$a^2 - 2ab + b^2 + 4ab \geq 4ab$$

—Y esto equivale a $a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$

—Ya entendí —dijo Daniel, ahora más tranquilo— y esa expresión corresponde a:

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

—Y cómo podemos extraer raíz sin problemas —comentó Camila— resulta:

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ lo que nos lleva a $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

—¡Genial! —exclamó Daniel—. Ya lo hemos demostrado en forma algebraica.

—¿Hemos…? —ironizó Camila, sonriendo —. “Hemos” suena a manada.

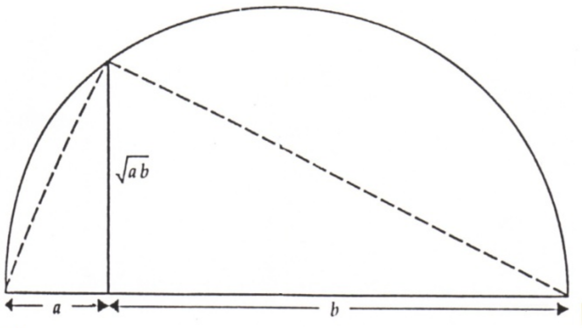
—Está bien, está bien, lo acepto —dijo Daniel resignado—, “lo HAS demostrado” en forma algebraica; pero ahora, debemos demostrarlo en forma geométrica.

—Lo primero es relacionar $\sqrt{ab}$ y $\dfrac{a+b}{2}$ con alguna entidad geométrica —sugirió Camila en tono pensante. —Por ejemplo, $\sqrt{ab}$ queda determinada, al aplicar el Teorema de Euclides referente a la altura, donde las proyecciones sobre los catetos son a y b, pero hasta allí llego.

—Bueno, partamos con eso —dijo Daniel—. Voy a hacer el dibujo.

—Agrégale la semicircunferencia, por si nos ayuda en algo —señaló Camila, mientras Daniel intentaba hacer la figura lo más exacta que podía.

—Listo. ¿Cómo quedó? —preguntó Daniel, orgulloso de su dibujo.



—Bastante bien para tu edad —respondió Camila, molestándolo en tono de broma.

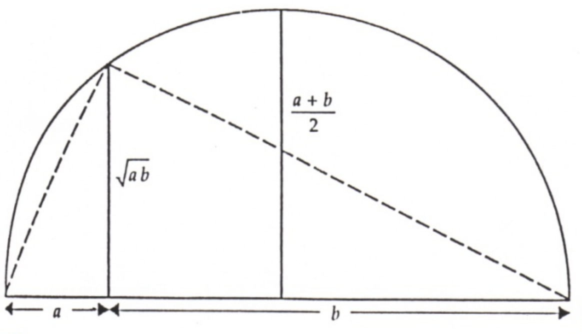
—Graciosita —señaló Daniel sonriendo.

—Sigamos —dijo Camila—. Ya tenemos la medida de $\sqrt{ab}$ y la podemos visualizar perfectamente.

—Correcto. Y si te fijas, el diámetro mide a + b y estamos buscando $\frac{a+b}{2}$, o sea, la medida del radio —concluyó Daniel.

—Excelente, ahora sólo falta determinar la forma de visualizarla —dijo Camila con actitud pensativa.

—¡Fácil! —exclamó Daniel, con voz triunfante. Y tomando el lápiz, trazó una nueva línea: el radio.



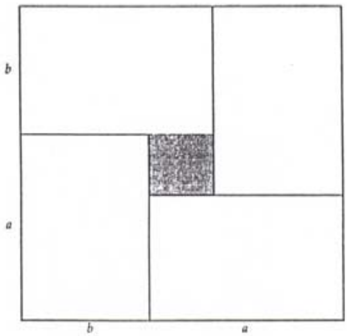
—Muy bien —reconoció Camila—, y con eso ya queda lista la visualización de que $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

—Nos falta visualizar que $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ —manifestó Daniel.

—Como tenemos que trabajar con medidas a y b, lo lógico es ocupar un rectángulo de esas medidas —reflexionó Camila.

—Eso hice —señaló Daniel—, pero después me complicó tener que llegar a un a+b y a un a—b al mismo tiempo. Probé con dos rectángulos y nada.

—Sigamos probando; creo que la clave está en combinar varios rectángulos, no sólo dos, de esta manera



… con esta combinación de rectángulo, logramos un cuadrado mayor de lado a+b y un cuadrado más pequeño, de lado a—b, —finalizó Camila.

—Y si al área del cuadrado mayor, le restamos el menor, el que sombreaste, nos quedan los cuatro rectángulos de área ab, o sea 4ab. Así —concluyó Daniel—, probamos visualmente que $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

—Somos unos genios —dijo Camila alzando su mano haciendo un golpe de palmas triunfal con la mano de Daniel—. Y dile a Antonio que no se acostumbre...

PARA QUE NO QUEDEN DUDAS

Aquella hermosa mañana, se respiraba ya en el ambiente la finalización de otro año escolar. Como siempre ocurre en los colegios, todo se volvía más acelerado y las actividades se multiplicaban por diez. Se había comenzado con las evaluaciones finales y era infaltable que alguien corriera tras una calculadora para saber su promedio final de la asignatura o del año, especialmente los alumnos de cuarto medio. Muchos ensayos para las respectivas licenciaturas y muestras artístico—musicales. La sala de computación parecía imprenta de tantos dípticos y trípticos que se estaban imprimiendo para informar sobre las diversas ceremonias finales.

En este contexto, Daniel se dirigía a la sala del tercer año medio a una de sus últimas clases. Su paso raudo no reflejaba el período escolar que se vivía; tal vez el único indicio era el peso de su maletín, por la cantidad de guías acumuladas durante el segundo semestre.

—Buenos días. ¿Cómo están? —preguntó Daniel, aunque imaginaba la respuesta.

—Buenos días —respondieron todos—. Cansados, agotados, muertos…

—Ya falta poco —los animó Daniel, sonriendo por las respuestas recibidas.

—En todo caso, igual vinimos preparados para la clase de hoy señor —afirmó Doris.

—Excelente, no esperaba menos de ustedes —dijo Daniel—. Comencemos de inmediato para que nos rinda el tiempo. Les recuerdo que la semana pasada se comprometieron a buscar en Internet, en algún diario regional o nacional, o escuchar en la radio o televisión, cualquier noticia que tuviese relación con la aplicación de la matemática en la actualidad. Comencemos entonces, ¿quién va a iniciar esta muestra?

—Yo señor —dijo Camilo.

—Adelante, la clase es toda tuya Camilo —invitó Daniel.

—Encontré, que con un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales, un grupo de investigadores de la Universidad Nacional Autónoma de México, logró describir el desarrollo y evolución de tumores cancerosos y su posterior proliferación conocida como metástasis. Este modelo teórico de gran precisión disminuye los experimentos en laboratorio, calcula el tiempo en que el tumor se expresa en el organismo y contribuye a conocer un proceso biomédico desde una óptica matemática, lo que acerca a ambas áreas del conocimiento, además de obtener y comparar resultados.

—Excelente muestra de aplicación de la matemática —reconoció Daniel—. ¿Quién más?

Mónica se puso de pie y se dirigió hacia la pizarra.

—Yo pensaba que iba a ser más difícil —comenzó diciendo Mónica—, pero me equivoqué ya que rápidamente encontré una noticia como la que el profesor nos solicitó. Un grupo de científicos afirma haber encontrado un modelo matemático, basado en la Teoría del Caos, que puede calcular la probabilidad de un ataque de asma. Este descubrimiento sería de gran ayuda para quienes sufren de asma ya que, basados en este estudio, podrían controlar los síntomas más efectivamente. Además, se podrían mejorar las pruebas de nuevos medicamentos. Profundizando un poco más —prosiguió Mónica—, les puedo contar que este estudio se realizó con la participación de 80 pacientes, durante 18 meses. Los científicos lograron predecir la probabilidad de que un ataque de asma ocurra dentro del plazo de un mes, basándose en mediciones que calculan con qué velocidad una persona puede exhalar aire de sus pulmones. Estas mediciones indican cuán bien o mal funcionan los pulmones del paciente. Hasta ahora, se necesitaban largos periodos de observación para determinar, tras cierto número de ataques, si una medicina funcionaba. Pero gracias a este estudio, ya no sería necesario esperar que la persona sufra un ataque para saberlo.

—Muy bien Mónica. Ese es precisamente el tipo de noticia que debían buscar, aunque me gustaría que, cuando presenten la información, nombraran la fuente de donde la obtuvieron.

—Yo la encontré en un diario mexicano llamado “La Crónica de Hoy” —señaló Mónica.

—Perfecto. ¿Quién pasa ahora? —preguntó Daniel.

—Yo señor, —respondió Ramón.

—Pasa y no te olvides de nombrar la fuente de la noticia —insistió Daniel.

—Voy a comenzar con una pregunta. ¿Es posible estudiar un ataque al corazón usando las matemáticas?

Ramón hizo una breve pausa y siguió.

—Pues sí lo es. Así lo comprobó el profesor Víctor Pérez García, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Castilla-La Mancha, en España. Él publicó un modelo matemático que estudia la propagación de los estímulos eléctricos del corazón, responsables de la contracción del mismo. Según el profesor García, en los países desarrollados, 4 de cada 10 personas mueren por causas cardiacas. Un 40% de estas muertes se deben a fallos eléctricos. Las grandes implicaciones sociales, económicas y sanitarias de estas cifras, hacen que estudios para determinar modelos de funcionamiento, sean cada vez más demandados por empresas de salud para diseñar tratamientos específicos para enfermedades cardiacas como la arritmia. Esta información —finalizó Ramón— la obtuve de la revista Campus, de la Universidad de Granada, España.

—Excelente, Ramón. ¿A quién le corresponde continuar?

—A mí —dijo Milena, poniéndose de pie.

—Pasa adelante.

—La información que encontré, le va a interesar mucho a algunos compañeros y compañeras del curso —dijo Milena. Se trata simplemente de cómo dejar de fumar aplicando la matemática.

—¡Cómo tanto! —exclamó Pedro.

—Precisamente por esto les solicité este trabajo; para que se lleven un par de sorpresas —dijo Daniel.

—Este estudio —comenzó Milena a explicar— se expuso en una conferencia impartida por la investigadora Cristina Santamaría, del Instituto de Matemática Multidisciplinar de la Universidad Politécnica de Valencia. El estudio realizado, descifra los factores que influyen en la recaída en el hábito del tabaco. Se estudiaron una serie de variables, como el número de cigarros que uno fuma al día, el sexo del fumador, las características físicas y médicas del mismo, como la presión arterial cuándo empezó a fumar, si se levanta en la mitad de la noche y el tiempo que transcurre por la mañana hasta que uno se fuma el primer cigarro.

—Estos factores —continuó Milena, ante la atenta mirada de sus compañeros— son relacionados a través de diversos modelos matemáticos y sus resultados determinan las variables más influyentes, así como la probabilidad de riesgo de recaída o la dificultad para abandonar este vicio, según el perfil del fumador. Esta información se utiliza para sacar el máximo rendimiento a la lucha contra el tabaquismo y así determinar la terapia más óptima para cada tipo de paciente, según su grado de adicción, y actuar preferentemente sobre los pacientes que tengan más posibilidades de recaída. A este trabajo de investigación del tabaquismo, se le pretende incorporar mejoras, considerando variables como la actividad laboral o la práctica deportiva del paciente. Encontré esta noticia —concluyó Milena—, publicada en varios diarios internacionales, como *El Mundo, El País* y *La Razón*.

—Espectacular, ¿hay más trabajos de aplicación de la matemática? —consultó Daniel.

—Yo encontré una información, que señala que gracias a la matemática, las películas cobran vida —informó Javier—, ya que muchas técnicas de animación que se usan en su producción, se basan en aspectos numéricos y geométricos. Los personajes, el paisaje de fondo y el movimiento, están basados en programas informáticos que combinan puntos de imagen digital, o sea pixels, con el fin de obtener formas geométricas, que luego son archivadas y manipuladas, mediante cálculos matemáticos efectuados por las tarjetas gráficas del computador. El programa informático codifica características, como la posición, el movimiento, el color y la textura. El programa usa vectores, matrices y aproximaciones poligonales a las superficies curvas, que determinan el grado de oscuridad de cada pixel.

—Debe ser bonito ese trabajo, especialmente cuando se hacen películas de monitos animados, como “La Era del Hielo”, por ejemplo —opinó Milena.

—O como “Buscando a Nemo” o “El Espanta Tiburones” —agregó Rosa

—Así es —aprobó Javier y continuó—. Cada fotograma de una película generada por un computador se compone de más de dos millones de pixels y puede llegar a tener alrededor de cuarenta millones de polígonos. La cantidad necesaria tan enorme de cálculos, convierte a los computadores en herramientas imprescindibles, pero sin la ayuda de las matemáticas, el computador no sabría que cálculos hacer.

—Gracias Javier. A todo lo anterior —intervino Daniel— quiero agregar que hay muchos hechos de la vida real que están siendo analizados matemáticamente, con el fin de evitar grandes catástrofes, como los tsunamis, especialmente por los trágicos hechos que todos ustedes conocen. Las grandes edificaciones y puentes son otra muestra clara de las múltiples y maravillosas aplicaciones que tiene la matemática en nuestro entorno. Otro estudio es el complicado fenómeno de la turbulencia, parte esencial de la aerodinámica; gracias a la matemática y a los modernos computadores, los túneles de viento se usan cada vez menos en el diseño aeronáutico.

—En consecuencia —acotó Mónica—, podríamos decir que en vez de respirar aire, lo que hacemos es respirar matemática.

—Si nos trasladamos es matemática, si giramos, también. Si miramos nuestro entorno, todo es geometría —dijo Ramón.

—Como las señales de tráfico, una hoja de papel, una goma, una baldosa, las casas… —enumeró Javier.

—Hasta los cables del alumbrado público, cuya curvatura se calcula utilizando el famoso número e —agregó Pedro.

—Y las pirámides egipcias y mayas; las canchas para hacer deportes; los balones; los juegos con dados, cartas, dominós; los viajes interplanetarios o los cálculos de precisión, por ejemplo, del proyecto Impacto Profundo; los envases, las cajas; las fotos que se agrandan y achican; los terremotos; el estudio de los fósiles…

Todos seguían agregando más y más aplicaciones sociales, culturales y científicas de la matemática.

—Y más todavía —prosiguió muy entusiasmado Daniel—; el estudio permanente de la matemática de la criptografía, con el fin de que los usuarios de Internet puedan comprar, pagar o realizar negocios de una forma segura. El gran descubrimiento de una rama de las matemáticas, llamada Teoría de Nudos, que juega un papel fundamental en la comprensión del funcionamiento del ADN y de la forma en que se reproduce; etc., etc., etcétera.

Daniel hizo una pausa, mirando con mucho orgullo a sus alumnos.

—Bien, estimadas alumnas y alumnos; hemos terminado un año muy productivo. Quiero felicitarlos por la importante participación que han tenido en la clase y por su gran interés y preocupación. Para finalizar, una última pregunta —dice Daniel alzando la voz—: ¿Les queda alguna duda sobre la aplicación de la matemática en la vida cotidiana?

—¡NOOO profe! —gritaron todos a coro.

Un gran aplauso dio por terminada la última clase de matemática del año.

"*Las matemáticas son el cimiento invisible de todo lo visible*"
(DANNY PERICH C.)

BIBLIOGRAFÍA

Cofré A. y Tapia L. (1995). "Cómo desarrollar el razonamiento lógico matemático". Editorial Universitaria, Santiago, Chile.

Baldor A. (1982). "Álgebra". Edime Organización Gráfica S. A., Madrid, España.

Mineduc (1999). "Matemática: Programa de Estudio Segundo Año Medio" Ministerio de Educación, Santiago, Chile.

Mineduc (2000). "Matemática: Programa de Estudio Tercer Año Medio" Ministerio de Educación, Santiago, Chile.

Pröschle, Francisco (2003) "Curso de Matemáticas Elementales: Álgebra" Prosa S.A., Santiago, Chile.

Perero, Mariano (1994). "Historia e Historias de Matemáticas" Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Mineduc (2002). "Páginas Didácticas" Ministerio de Educación, Santiago, Chile.

Perelman, Yakov(1969). "Algebra Recreativa" Editorial MIR, Moscú, Rusia.

Sociedad de Matemática de Chile, (1999), Revista del Profesor de Matemática" Año 4 Número Especial, LOM Ediciones, Santiago, Chile.

Santaló, L. (1955) "La Probabilidad y sus Aplicaciones", Ibero—AmFreddyana, Buenos Aires, Argentina.

Willerding, Margaret F., (1969) "Conceptos Matemáticos, un enfoque histórico" Compañía Editorial Continental S.A. — México.

Gómez, Pedro; Mesa Vilma, y otros (1996), "Situaciones problemáticas de precálculo" Una Empresa Docente, Colombia, Grupo Editorial IberoamFreddya,—México.

Alsina, Claudi "La matemática hermosa se enseña con el corazón" Pdf.

Fernández J. Mª, Barragán J. M y Molina A., "Funciones Cuadráticas" Pdf.

Sociedad de Matemática de Chile, (1997), Revista del Profesor de Matemática" Año 2 Nº 1, Santiago, Chile

Becerra Rigoberto, Montecinos Guido, Silva Juan, Garrido Ricardo, "Función Parte Entera" Pdf.

Del Puerto, Silvia; Minnaard, Claudia, La calculadora como recurso didáctico. Universidad CAECE, Buenos Aires Argentina. PDF

Gálvez P., Grecia, Navarro A., Silvia; Riveros R. Marta; Zanocco S. Pierina; (1994) "Aprendiendo matemáticas con calculadora" Mineduc , Chile.

Talanquer, Vicente, "Fractus, fracta, fractal: fractales, de laberintos y espejos" (1996) Fondo de Cultura Económica, México.

Bardelli, Luis (2002) "Teorías de la Medición Educacional, Magíster en Educación, Asignatura III, Módulo 3" Instituto Profesional Valle Central, Chile.

García Azcárate, Ana (2003) "Curso de Formación: Didáctica del Álgebra" Grupo Azarquiel de Matemáticas, Guías de Aprendizaje, Madrid, España.

Barriga, Oscar; Cortés Víctor; Plaza Sergio; Riera Gonzalo; (1994) "Matemáticas y Olimpíadas" Sociedad Matemática de Chile—Fundación Andes, Santiago, Chile.

Universidad de Chile, Vicerrectoría de Asuntos Académicos, Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional, (2004) "Tratamiento de los puntajes" Presentación sobre acuerdo del H. Consejo de Rectores de la Sesión Nº461 del 02 de Septiembre de 2004.

Mineduc (2002) "Perfeccionamiento para la implementación de los nuevos planes y programas de estudio" Ministerio de Educación, Santiago, Chile.

Rodriguez Vidal, R. (1988) "Enjambre Matemático" Editorial: Reverté. Universidad de Zaragoza, España.

Julios Edgard H., (2002), "Matemáticas Rápidas" Grupo Editorial Norma, Bogotá, Colombia.

Mitrovich G., Dinko; Vargas N., Enid; Venegas A., Malva. (2002) "Talleres Comunales de Perfeccionamiento Primer Ciclo Básico" CPEIP — P — 900, Mineduc, Chile.

Lehmann, Charles H. (1962) "Álgebra" Editorial Limusa—Wiley, S.A. México, D.F.

WEBGRAFÍA

Escudero J., *http://platea.pntic.mec.es/~jescuder/prob_int.htm*
Fernández J. Mª, Barragán J. M. y Molina A.,
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/1bach/naturaleza/numeroe/numeroe.htm.
Colaboradores de Wikipedia,
http://es.wikipedia.org/wiki/Escala_sismol%C3%B3gica_de_Richter.
Colaboradores de Wikipedia,
http://es.wikipedia.org/wiki/Arqu%C3%ADmedes.
Instituto de Geología y la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, *http://www.geocities.com/geocienciasmx/estructura.htm.*
Rincón Matemático,
http://centros5.pntic.mec.es/ies.juan.de.mairena/leonardovi.htm.
Carrollia, *http://www.mensa.es/carrollia/c64.pdf.*
Triburcio, Susana; *http://www.elementos.buap.mx/num44/htm/21.htm.*
Red escolar,
http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/mate4l.htm.
Centro virtual de la Divulgación de la Matemática,
http://www.divulgamat.net/weborriak/Cultura/CineMate/Elena/index.asp.
Población Sáez, Alfonso, *http://gauss.mat.eup.uva.es/%7Ealfonso/cine.html.*
Matematicalia, Revista Digital de divulgación Matemática de la Real Sociedad Matemática española, *http://www.matematicalia.net/index.php.*
Colaboradores de Wikipedia. Número primo de Fermat [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2005
http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_primo_de_Fermat
Mora Pardo, Manuel, *http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0224-02/ed99-0224-02.html.*
González, José María,
http://www.icsi.berkeley.edu/~chema/luthiers/003.html.
Les Luthiers, Pagina Oficial, *http://www.lesluthiers.org/main.php.*
Parra, Ceferino, I.E.S. "La Rábida"
http://es.geocities.com/guijuelo10/datacion_c14.htm, Huelva, España

Stern, David, *http://www.phy6.org/stargaze/Mcolumb.htm*.
Eduteka, *http://www.eduteka.org/ComoAprendenLosEstudiantes.php*. Cali, Colombia
Nava, Alejandro, "Antecedentes y bases: un pasado aparentemente inexplicable y la deriva continental"
http://omega.ilce.edu.mx:3000/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/113/htm/sec_6.htm.
Sanchos, Miguel Ángel (2004) "Tartaglia frente a Cardano"
http://ific.uv.es/rei/Historia/anecdotas3.htm.
Chavez, S. "Funciones trascendentales"
http://fismat.unap.cl/schavez/FUNexplog.doc.
Barreda, Pedro Dr. *http://www.pediatraldia.cl/beber_conduccion.htm*.
Garrido Arjona, Jesús
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/14/matematicas—14.html.
Canal 13 de la Pontificia Universidad Católica de Chile
http://teletrece.canal13.cl/t13/html/Secciones/Reporteros/230606Iimprimirq1.html, Santiago, Chile.
http://www.portalfitness.com.
Centro Comenius,
http://www.comenius.usach.cl/webmat2/problemas/frame—problemas.htm, USACH, Santiago, Chile.

Las Aventuras Matemáticas de Daniel

VERSIÓN DIGITAL

Con la introducción de la Reforma Educacional en su colegio, el profesor de matemática, Daniel Mercado reconoció sus arraigadas prácticas de interminables ejercicios, que siempre consideró necesarios para la formación matemática de sus alumnos. Sin embargo, bajo la lupa de la reflexión y los nuevos métodos educativos, pudo corroborar cómo su antiguo modelo había confabulado contra su ferviente deseo de traspasar a sus estudiantes, el gusto por la matemática.

Un vuelco didáctico comenzó a gestarse a partir del replanteamiento de sus ideas; aquel mundo abstracto, gobernado por fórmulas y teoremas, comenzó a actualizarse en la simpleza de las cosas, en el mundo cotidiano, donde sus alumnos podían observar maravillados una matemática viva, concreta, real y auténtica.

Es en este contexto de enseñanza-aprendizaje renovado e innovador, basado en experiencias que Daniel, junto a su colega Camila Bustamante, va descubriendo las increíbles aplicaciones de la matemática, a través de diversas actividades creativas para el aula.

Entre sabrosos diálogos, situaciones problemáticas y divertidas, apasionadas discusiones sobre metodología, didáctica, ideologías constructivistas, evaluación y otras temas contingentes, los personajes nos muestran que la matemática es una aventura que todos pueden vivir y disfrutar.

EDITORIAL Impacto